Über diejenigen Unicursalcurven,

deren Bogen eine algebraische Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ist.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt

der hohen philosophischen Fakultät der
Universität Erlangen

von

Friedrich Stosch
aus Danzig.

Guben 1891.
Druck von Albert Koenig.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535708_0212

I. Form des algebraischen Bogens.

Die Gleichungen einer Unicursalcurve n^{ter} Ordnung sind bekanntlich:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_0 z_n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n} = \frac{f(z)}{g(z)}, \\ y &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n} = \frac{f_1(z)}{g(z)}, \end{aligned}\right.$$

wenn x und y die rechtwinkligen Coordinaten bedeuten. Die Differentialgleichung für den Bogen s einer solchen Curve ist

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1 g')^2}{g^4}.$$

Dieser Bogen ist dann und nur dann algebraische Funktion der Coordinaten x und y, wenn er auch algebraische Funktion der Variablen z ist. Um die Bedingungen für die Curven mit algebraischen Bogen zu finden, werden wir daher zunächst das algebraische Integral einer Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = R(z)$$

betrachten, wo R eine rationale Funktion von z bedeutet.

Schreiben wir die Differentialgleichung $R \cdot \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 - 1 = 0$, so ist sie von der Form $F\left(z, \frac{dz}{ds}\right) = 0$, wo F eine ganze rationale Funktion der Argumente in der Klammer bedeutet. Von dieser allgemeineren Differentialgleichung wissen wir*):

Ist die Gleichung vom m^{ten} Grade in $\frac{dz}{ds}$ und lässt sie ein algebraisches Integral zu, so ist dasselbe durch eine Gleichung gegeben:

*) Briot et Bouquet, Théorie des fonctions doublement-périodiques, 1859, pag. 286—288.

$$f_0 s^m + f_1 s^{m-1} + \cdots + f_m = 0,$$

wo $f_1 \cdots f_m$ ganze Funktionen von z sind. Wenn demnach die Differentialgleichung $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = R(z)$ ein algebraisches Integral besitzt, so genügt dasselbe einer Gleichung

$$s^2 + R_1 \cdot s + R_2 = 0,$$

wo R_1 und R_2 rationale Funktionen von z sind. Daraus folgt:

$$s = -\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4 R_2}$$

$$\frac{ds}{dz} = -\frac{1}{2} R_1' + \frac{R_1 R_1' - 2 R_2'}{\sqrt{R_1^2 - 4 R_2}}$$

Diesen Wert von $\frac{ds}{dz}$ setzen wir in unsere Differentialgleichung $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = R$ ein, so ergiebt sich:

$$R = \frac{1}{4}(R_1')^2 + \frac{(R_1 R_1' - 2 R_2')^2}{R_1^2 - 4 R_2} - R_1' \frac{R_1 R_1' - 2 R_2'}{\sqrt{R_1^2 - 4 R_2}}$$

Hieraus ersieht man, dass $R_1' \frac{R_1 R_1' - 2 R_2'}{\sqrt{R_1^2 - 4 R_2}}$ eine rationale Funktion von z sein muss, oder verschwindet. Dieses kann aber nur auf eine der folgenden dreierlei Arten erfüllt sein:

1) $\sqrt{R_1^2 - 4 R_2}$ ist rational ausziehbar, $= R_3$, dann ist $s = -\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_3$, also ist der Bogen rationale Funktion von z.

2) Es ist $R_1' = 0$, also $R_1 = \text{Const.}$, und in diesem Falle haben wir $s = -\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \sqrt{C^2 - 4 R_2}$, oder $s = \text{Const.} + \sqrt{R_4}$.

3) Es ist $R_1 R_1' - 2 R_2' = 0$ oder was dasselbe ist: $\frac{d}{dz}\left(\frac{R_1^2}{2} - 2 R_2\right) = 0$, $R_1^2 - 4 R_2 = \text{Const.}$ Dann haben wir $s = -\frac{1}{2} R_1 + C$. Dieser Fall ist aber in 1) schon mit inbegriffen.

Wir haben nunmehr das Resultat: Wenn eine Unicursalcurve einen Bogen hat, welcher algebraische Funktion der rechtwinkligen Coordinaten ist, so ist derselbe entweder rational, $s = R(z)$, oder algebraisch, und zwar von der Form $s = C + \sqrt{R_1(z)}$.

Wir betrachten zunächst den rationalen Bogen. Derselbe sei $s = \frac{\varphi}{\omega}$, worin die ganzen Funktionen φ und ω keinen gemeinsamen Teiler enthalten. Wenn s für einen endlichen Wert von z unendlich wird, so muss für denselben notwendig auch $\frac{ds}{dz}$ unendlich werden. Daher kann s nur für solche endliche Werte von z unendlich werden, für welche es auch $\frac{ds}{dz}$ wird, d. h. für welche der Nenner $g = 0$ wird. Sei $z = z_\mu$ ein Unendlichkeitspunkt für s, so wird man also schreiben können $s = \frac{\varphi}{\varrho \cdot (z - z_\mu)^{\beta_\mu}}$, wo φ und ϱ den Faktor $z - z_\mu$ nicht mehr enthalten, und wo z_μ irgend eine der Wurzeln von $g = 0$ ist. Daraus ergiebt sich:

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{\{\varphi'\varrho(z - z_\mu) - \varphi\varrho'(z - z_\mu) - \beta_\mu \varphi\varrho\}^2}{\varrho^4 (z - z_\mu)^{2\beta_\mu + 2}}$$

und dieses ist

$$= \frac{(f''g - f'g')^2 + (f_1'g - f_1g')^2}{g_1 (z - z_\mu)^{4\gamma_\mu}},$$

wenn angenommen wird, dass g den Faktor $(z - z_\mu)^{\gamma_\mu}$ hat. g_1 enthält den Faktor $(z - z_\mu)$ dann gar nicht.

Es sei nun 1) $g = (z - z_1)(z - z_2) \ldots$ mit lauter einfachen Faktoren, also auch $\gamma_\mu = 1$. Wenn dann

$$(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2$$

den Faktor $z - z_\mu$ nicht enthält, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung $2\beta_\mu + 2 = 4$, also $\beta_\mu = 1$. Man hat also $\omega = \varrho \cdot (z - z_\mu)$, und da $(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2$ im allgemeinen Falle keinen der Faktoren $(z - z_\mu)$ enthalten wird, so muss ω dieselben alle enthalten, so dass man hat $\omega = g$, also

$$s = \frac{\varphi}{g}.$$

Enthält aber $(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2$ den Faktor $(z - z_\mu)^{2\varepsilon}$ — der Exponent muss grade sein, weil

$$(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2$$

ein vollständiges Quadrat ist —, so hat man

$$\frac{(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2}{g_1 (z - z_\mu)^4} = \frac{(z - z_\mu)^{2\varepsilon}\, \Phi}{g_1 (z - z_\mu)^4},$$

wo Φ den Faktor $z - z_\mu$ nicht mehr enthält.

Man schliesst wie oben $2\beta_\mu + 2 = 4 - 2\varepsilon$, $\beta_\mu = 1 - \varepsilon$. Man hat also $s = \dfrac{\varphi \cdot (z - z_\mu)^{\varepsilon - 1}}{\varrho}$.

$z = z_\mu$ ist dann kein Unendlichkeitspunkt mehr für s.

Jedenfalls können wir aber immer annehmen $s = \dfrac{\varphi}{g}$, wenn wir dahingestellt sein lassen, ob φ mit g einen gemeinsamen Teiler habe oder nicht.

Es sei 2) $g = (z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} \ldots$

Wir setzen dann

$$g = \psi \cdot \chi,$$

wo
$$\psi = (z - z_1)(z - z_2) \ldots$$
$$\chi = (z - z_1)^{\gamma_1 - 1} (z - z_2)^{\gamma_2 - 1} \ldots$$

Dann ist $g' = \psi_1 \chi$, wenn $\psi_1 = \psi' + \psi \dfrac{\chi'}{\chi}$.

Es wird also

$$\frac{(f''g - fg')_2 + (f_1'g - f_1g')^2}{g_1 (z - z_\mu)^{4\gamma_\mu}} = \frac{(f''\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2}{\psi^4 \cdot \chi^2}.$$

Wenn $(f'\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2$ den Faktor $z - z_\mu$ nicht enthält, so schliesst man wie oben, dass $2\beta_\mu + 2 = 2\gamma_\mu + 2$, also $\beta_\mu = \gamma_\mu$ ist.

Wir haben also, da dieses im allgemeinen Falle für alle z_μ gelten wird, wieder $s = \dfrac{\varphi}{g}$.

Enthalte aber $(f'\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2$ den Faktor $(z - z_\mu)^{2\varepsilon}$, so hat man

$$\frac{(f''\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2}{\psi^4 \chi^2} = \frac{(z - z_\mu)^{2\varepsilon}\, \Phi}{\psi^4 \chi^2}$$

worin Φ den Faktor $z - z_\mu$ nicht mehr enthält. Man schliesst $2\beta_\mu + 2 = 2\gamma_\mu + 2 - 2\varepsilon$, also $\beta_\mu = \gamma_\mu - \varepsilon$, folglich

$s = \dfrac{\varphi}{\varrho \cdot (z - z_\mu)^{\gamma_\mu - \varepsilon}}$. $z = z_\mu$ ist dann für s ein Unendlichkeits-

punkt von geringerer Ordnung als γ_μ; wenn $\varepsilon \geqq \gamma_\mu$ ist, so ist er für s überhaupt kein Unendlichkeitspunkt mehr. Wie dem auch sei, wir können immer annehmen

$$s = \frac{\varphi}{g},$$

wenn wir dahingestellt sein lassen, ob φ mit g einen gemeinsamen Teiler habe oder nicht.

Wir bestimmen noch den Grad ν der Funktion φ aus der Gleichung

$$(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2 = (\varphi'g - \varphi g')^2.$$

Bezeichnen wir mit m den wahren Grad von g ($m \leqq n$) und nehmen dann den Coefficienten der höchsten nicht verschwindenden Potenz von g, wie immer erlaubt, $= 1$ an ($g = z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots$), so ist der Grad auf der rechten Seite der Bedingungsgleichung $2(\nu + m - 1)$, auf der linken Seite $2.(n + m - 1)$.

Der Coefficient der höchsten Potenz auf der rechten Seite ist $(\nu - m)^2 \alpha_0^2$, auf der linken $(n - m)^2 (\alpha_0^2 + b_0^2)$. Dabei ist gedacht $\varphi = \alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots$, und wie früher

$$f = a_0 z^n + \cdots + a_n, \quad f_1 = b_0 z_n + \cdots + b_n.$$

Wenn nun die Coefficienten der höchsten Potenz auf beiden Seiten der Bedingungsgleichung nicht verschwinden, so hat man $2(\nu + m - 1) = 2(n + m - 1)$, also $\nu = n$.

Wenn wenigstens der Coefficient der höchsten Potenz auf der rechten Seite nicht verschwindet, — d. h. wenn ν von m verschieden ist — so könnte der wahre Grad auf der linken Seite $2n + 2m - 2 - \varepsilon$ sein, wo ε eine positive grade Zahl ist. Dann ist $2(\nu + m - 1) = 2(n + m - 1) - \varepsilon$, also hat man immer ν höchstens $= n$. Der Coefficient der höchsten Potenz auf der rechten Seite kann endlich nur verschwinden für $\nu = m$ (denn α_0 ist von 0 verschieden, weil ν der wahre Grad von φ ist), man hat also auch dann $\nu \leqq n$, was somit allgemein gilt.

Wir betrachten jetzt den algebraischen Bogen. Derselbe sei

$$s = C + \int \frac{\varphi}{\omega},$$

worin φ und ω keinen gemeinsamen Teiler enthalten mögen.

Wie bei rationalem Bogen schliessen wir, dass s nur für solche endlichen Werte von z unendlich werden kann, für welche auch $\frac{ds}{dz} = \infty$, also $g = 0$ wird. Sei $z = z_\mu$ eine Wurzel der

Gleichung $g = 0$ und auch ein Unendlichkeitspunkt für s, so werden wir schreiben können $s = C + \int \sqrt{\frac{\varphi}{\varrho (z - z_\mu)^{\beta_\mu}}}$ wo φ und ϱ den Faktor $z - z_\mu$ nicht mehr enthalten. Daraus ergiebt sich

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{\{\varphi' \varrho (z - z_\mu) - \varphi \varrho' (z - z_\mu) - \varphi \varrho \beta_\mu\}^2}{\varphi \varrho^3 (z - z_\mu)^{\beta_\mu + 2}}$$

und wenn $g = (z - z_1)^{\gamma^1} (z - z_2)^{\gamma^2} \cdots$, so ist dieses

$$= \frac{(f'\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2}{\psi^4 \chi^2}.$$

Der Nenner des letzteren Ausdruckes hat den Faktor $(z - z_\mu)^{2\gamma_\mu + 2}$. Wenn also $(f''\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2$ den Faktor $z - z_\mu$ nicht enthält, so schliesst man, dass

$$\beta_\mu + 2 = 2\gamma_\mu + 2$$

ist, also $\beta_\mu = 2\gamma_\mu$. Da im allgemeinen Falle

$$(f^1\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2$$

keinen der Faktoren $z - z_\mu$ enthalten wird, so haben wir also

$$\omega = g^2,$$

folglich

$$s = \frac{\sqrt{\varphi}}{g},$$

und φ hat mit g dann keinen gemeinsamen Teiler. Enthalte aber $(f'\psi - f\psi_1) + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2$ den Faktor $(z - z_\mu)^\varepsilon$, so hat man

$$\frac{(f''\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2}{\psi^4 \chi^2} = \frac{(z - z_\mu)^\varepsilon \Phi}{\psi^4 \chi^2},$$

wo dann Φ den Faktor $(z - z_\mu)$ nicht mehr enthält, Dann schliesst man $\beta_\mu = 2\gamma_\mu - \varepsilon$, also $s = C + \int \sqrt{\frac{\varphi}{\varrho \cdot (z - z_\mu)^{2\gamma_\mu - \varepsilon}}}$

Wir können jedenfalls immer annehmen

$$s = C + \frac{\sqrt{\varphi}}{g},$$

wenn wir dahingestellt sein lassen, ob φ mit g einen gemeinsamen Theiler habe oder nicht.

Den Grad der Funktion φ können wir bestimmen aus der Gleichung

$$\{f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1'g)^2\}\varphi = \left(\tfrac{1}{2}\varphi' g - \varphi g'\right)^2,$$

Bezeichnet wieder m den Grad von $g(g = z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots)$, ν den von φ, so hat man auf der linken Seite der Bedingungsgleichung den Grad $2n + 2m - 2 + \nu$, auf der rechten Seite $2m + 2\nu - 2$.

Wenn also die Coefficienten der höchsten Potenz auf beiden Seiten nicht verschwinden, ergiebt sich

$$\nu = 2n.$$

Andernfalls findet man auf dieselbe Art wie bei rationalem Bogen, dass immer $\nu \leqq 2n$ ist.

Wir haben nunmehr folgendes Resultat:

Wenn eine Unicursalcurve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{(z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} \cdots} = \dfrac{f}{g}, \\ y = \dfrac{b_0 z^n + \cdots + b_n}{(z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} \cdots} = \dfrac{f_1}{g}, \end{cases}$$

einen algebraischen Bogen hat, so ist derselbe entweder rational und von der Form

$$s = C + \frac{\alpha_0 z^n + \cdots + \alpha_n}{(z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} \cdots} = C + \frac{\varphi}{g},$$

oder irrational und von der Form

$$s = C + \frac{\sqrt{\alpha_0 z^{2n} + \cdots + \alpha_{2n}}}{(z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} \cdots} = C + \frac{\sqrt{\varphi}}{g}.$$

Die Coefficienten der höchsten Potenzen a_0, b_0, α_0 lassen auch Nullwerte zu, soweit sich dieses mit der Bedingung verträgt, dass die Curve wirklich von $n$ter Ordnung sei. (Z. B. kann nicht gleichzeitig $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ sein, wenn g von niederem als $n$tem Grade.)

Im Falle eines irrationalen Bogens enthält die Funktion φ nur mehrfache Faktoren, oder etwaige einfache Faktoren müssen gleichzeitig Faktoren von g sein.

Die letztere Behauptung ist noch nachzuweisen.

Da $(f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\varphi' g - \varphi g'\right)^2}{\varphi}$, so muss

$\frac{\varphi'^2 g^2}{\varphi}$ eine ganze Funktion sein. Haben nun φ und g keinen gemeinsamen Teiler, so folgt daraus, dass φ'^2 durch φ teilbar ist, folglich φ nur mehrfache Faktoren enthält. Wenn φ und g einen gemeinsamen Teiler haben, so muss jedenfalls $\frac{\varphi'^2 g^2}{\varphi}$ auch eine ganze Funktion sein, alle Faktoren von φ ausser jenem gemeinsamen Teiler müssen daher mehrfache sein, dieser Teiler selbst aber könnte ein einfacher Faktor oder ein Produkt einfacher Faktoren sein.

II. Allgemeines über die Aufgabe: Alle Curven einer Ordnung *n* mit algebraischem Bogen zu finden.

Die Bedingung, dass eine Unicursalcurve einen rationalen Bogen hat, ist nach Obigem

$$\text{I)} \quad (f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2 = (\varphi'g - \varphi g')^2$$

die Bedingung, dass sie einen algebraischen Bogen hat:

$$\text{II)} \quad (f'g - fg')^2 + (f_1'g - f_1g')^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\varphi'g - \varphi g'\right)^2}{\varphi}.$$

Wenn g mehrfache Faktoren enthält, erniedrigt sich durch die Substitution $g = \psi\chi$, wo

$$\psi = (z - z_1)(z - z_2)\cdots, \quad \chi = (z - z_1)^{\gamma_1 - 1}(z - z_2)^{\gamma_2 - 1}\cdots,$$

der Grad dieser Bedingungsgleichung, indem man hat für rationale Bogen

$$\text{I')} \quad (f'\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2 = (\varphi'\psi - \varphi\psi_1)^2,$$

und für algebraische Bogen

$$\text{II')} \quad (f'\psi - f\psi_1)^2 + (f_1'\psi - f_1\psi_1)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\varphi'\psi - \varphi\psi_1\right)^2}{\varphi^4\chi^2}.$$

Durch die Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen auf der rechten und linken Seite erhält man daraus ein System von Bedingungsgleichungen zwischen den Curvenconstanten und den Bogenconstanten $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$, aus welchen man die Curve bestimmen kann, nach Annahme gewisser Willkürlicher aus jenen Constanten. Wir fassen die Aufgabe ins Auge: Alle

Unicursalcurven einer vorgelegten Ordnung n mit algebraischem Bogen zu finden.

Um diese Aufgabe zu lösen, hat man die Bedingungen I) und II) oder I') und II') für den vorgelegten Wert von n zu specialisieren und die dann sich ergebenden Bestimmungsgleichungen aufzulösen. Wir werden dabei aber gesonderte Fälle betrachten.

1) Wir sehen, falls man in der Bedingung I) oder II) den Grad von g um 1 sinken lässt, so sinkt der Grad der Bedingungsgleichung um 2, dabei vermindert sich die Zahl der Constanten nur um 1, es vergrössert sich also die Zahl der Willkürlichen. Desswegen werden wir so viel Fälle gesondert betrachten, als der Grad von g verschieden sein kann.

2) Wenn man statt zweier einfacher Faktoren von g einen zweifachen annimmt, sinkt die Zahl der Constanten um 1, dagegen durch Weghebung eines quadratischen Faktors (vgl. die Substitution $g = \psi \cdot \chi$) der Grad der Bedingungsgleichung um 2, also desgleichen die Zahl der Einzelgleichungen um 2. Desshalb werden wir für ein und denselben Grad m von g so viel Fälle unterscheiden, als die Mehrfachheit der Einzelfaktoren verschieden sein kann.

Wir können ferner annehmen, dass alle Polynome reell sind, also alle Coefficienten a, b, α, c reell, wenn man $g = z^m + c_1 z^{m-1} + \cdot, + c_m$ schreibt. Wir können daher alle Curven ausschliessen, bei welchen ein Teil der Coefficienten notwendig imaginär ist.*) So können wir bei $m < n$ alle

*) Übrigens können die Coefficienten wesentlich imaginär sein, während die Curve reell ist. Geschlossene Curven (ohne unendliche Zweige) z. B. lassen sich offenbar nur dann in Gleichungen mit $m < n$ darstellen, wenn unter den Coefficienten wesentlich imaginäre sind. Denn wären alle Coefficienten reell, so würde für $z = \infty$ x und y reell unendlich sein, die Curve würde sich also reell ins Unendliche erstrecken.

Curven ohne unendliche Zweige können aber durch Gleichungen mit reellen Coefficienten dargestellt werden, wenn der Grad von g gleich n ist. Vergleiche den Kreis $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Dessen Gleichungen

$$\begin{cases} x = \frac{-z^2+2iz+1}{2iz} \\ y = \frac{z^2+1}{2z} \end{cases}$$

enthalten wesentlich imaginäre Coefficienten. Derselbe Kreis lässt sich aber in den Gleichungen darstellen

$$\begin{cases} x = \frac{2}{z^2+1} \\ y = \frac{2z}{z^2+1} \end{cases}$$

diejenigen Curven ausschliessen, für welche a_0, der Coefficient der höchsten Potenz von φ, verschwindet. Denn in den Bedingungen I) oder II) muss dann auch der Coefficient der höchsten Potenz der linken Seite verschwinden. Auf der linken Seite ist aber $(n-m)^2\ (a_0^2+b_0^2)$ jener Coefficient, und, weil $n>m$ ist, muss daher $a_0^2+b_0^2=0$, also $a_0=ib_0$ sein, woraus folgt, dass einer der Coefficienten a_0, b_0 notwendig imaginär ist [oder $a_0=0$, $b_0=0$; dann ist aber die Curve nicht mehr von $n$ter Ordnung].

Unter Voraussetzung reeller Polynome schliesst man ferner. Wenn g vom Grade n ist, und $(z-z_\mu)^{\gamma_\mu}$ ein reeller Faktor von g, so kann man durch die Substitution $\frac{1}{z-z_\mu}$ statt $(z-z_\mu)$ g auf den Grad $n-\gamma_\mu$ reducieren, und die Polynome in den neuen Curvengleichungen sind wieder alle reell. Diese Reduktion ist nur dann nicht möglich, wenn alle Faktoren von g imaginär sind. Für $m=n$ brauchen wir also nur die Fälle zu betrachten, in welchen g lauter imaginäre Faktoren hat Dieses kommt nur in Betracht, wenn n grade ist.

Das System der Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten lässt übrigens eine Auflösung zu, auch wenn eine Curve von den vorliegenden Gleichungsformen und wirklich n^{ter} Ordnung nicht existieren kann — wie z. B. für $n=2$, da kein Kegelschnitt einen algebraischen Bogen hat. Ergeben sich in solchem Falle durch die Rechnung reelle Werte der Coefficienten, so muss die gefundene Curve von geringerer als n^{ter} Ordnung sein. Vergleiche die Curve

$$\begin{cases} x=a_0z^2+a_1z \\ y=b_0z^2+b_1z \end{cases}$$

mit dem Bogen

$$s=\alpha_0z^2+\alpha_1z.$$

Die Bedingung

$$(2a_0z+a_1)^2+(2b_0z+b_1)^2=(2\alpha_0z+\alpha_1)^2$$

ergiebt folgende Bestimmungsgleichungen:

$$1)\ \alpha_0^2=a_0^2+b_0^2$$
$$2)\ \alpha_0\alpha_1=a_0a_1+b_0b_1$$
$$3)\ \alpha_1^2=a_1^2+b_1^2.$$

Da das Produkt der rechten Seiten von 1) und 3) gleich dem Quadrat der rechten Seite von 2) sein muss, ergiebt sich:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0,$$
$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}.$$

Da
$$x = a_0 \left(z^2 + \frac{a_1}{a_0} z \right)$$
$$y = b_0 \left(z^2 + \frac{b_1}{b_0} z \right) \text{ ist,}$$

ergiebt sich also eine grade Linie $\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0}$.

Allgemein kann eine Curve

$\begin{cases} x = \frac{f}{g} \\ y = \frac{f_1}{g} \end{cases}$, wenn sie keine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung ist, für $n = r \cdot s$ die s^{te} Potenz einer Curve r^{ter} Ordnung sein. Solche Curven werden sich also für $n = 3$ auf grade Linien reducieren, für $n = 4$ ebenfalls auf grade Linien weil auch eine Unicursalcurve 2^{ter} Ordnung mit algebraischem Bogen sich auf eine Grade reduciert -, für $n = 6$ auf grade Linien oder Curven 3^{ter} Ordnung etc.

Endlich kann die Auflösung der Bestimmungsgleichungen imaginäre Resultate ergeben, wenn eine Curve der vorgelegten Gleichungsform nicht existiert. Betrachte z. B. die Curve

$$\begin{cases} x = a_0 z^2 + a_1 z \\ y = b_0 z^2 + b_1 z \end{cases}$$

mit dem Bogen

$$s = C + \sqrt{(a_0 z + a_1)^3}.$$

Ein Teil der Coefficienten muss notwendiger Weise imaginär werden, weil φ von geringerem als $2n^{tem}$ Grade ist (vgl. oben).

Die Bedingung wird

$$(2a_0 z + a_1)^2 + (2b_0 z + b_1)^2 = \frac{9}{4} a_0^2 (a_0 z + a_1).$$

Daraus ergeben sich die Bestimmungsgleichungen:

1) $a_0^2 + b_0^2 = 0$

2) $a_0 a_1 + b_0 b_1 = \frac{9}{16} a_0^3$

3) $a_1^2 + b_1^2 = \frac{9}{4} a_0^2 a_1.$

b_1 kann gleich Null, $b_0 = 1$ gesetzt werden, weil man für z eine Substitution $\gamma z + \delta$ machen kann. Die dadurch wieder auftretenden Coefficienten a_2 und b_2 können wegen der Coordinatenverschiebung $x \quad a_2 = \xi$, $y - b_2 = \eta$ gleich Null gesetzt werden. Wir erhalten dann:

$$a_0 = i, \; a_1 = -\frac{9}{16} i \alpha_0^3, \; \alpha_1 = -\frac{9}{64} \alpha_0^4.$$

Es ergiebt sich also eine imaginäre Curve 2^{ter} Ordnung

$$\begin{cases} x = iz^2 - \frac{9}{16} i \alpha_0^3 z \\ y = z^2 \end{cases},$$

oder

$$(x - iy)^2 + \frac{81}{256} \alpha_0^6 y = 0.$$

III. Die Curven 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung mit rationalem Bogen.

Wir suchen zuerst die Curve

$$\begin{cases} x = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = f \\ y = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = f_1, \end{cases}$$

deren Bogen rational ist, also

$$s = \alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \text{Const.} = \varphi + \text{C}.$$

Wir können $z = z' + \beta$ setzen, so wird

$$x = a_0 z'^3 + (3 a_0 \beta + a_1) z'^2 + (3 a_0 \beta^2 + 2 a_1 \beta + a_2) z' + (a_0 \beta^3 + a_1 \beta^2 + a_2 \beta + a_3).$$

Einen der Coefficienten kann man verschwinden lassen, z. B. den von z', indem man β bestimmt aus der Gleichung

$$3 a_0 \beta^2 + 2 a_1 \beta + a_2 = 0.$$

Wir können daher jetzt wieder die ursprünglichen Gleichungsformen

$$\begin{cases} x = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \\ y = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \end{cases}$$

annehmen, dabei aber $a_2 = 0$ voraussetzen. Setzen wir dann $x' = x + \mu$, $y' = y + \nu$, was eine Verschiebung des Coordinatensystems bedeutet, und bestimmen $\mu = -a_3$, $\nu = -b_3$, so vereinfachen sich die Gleichungen in

$$\begin{cases} x = a_0 z^3 + a_1 z^2 \\ y = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z. \end{cases}$$

Setzt man endlich αz statt z, was die Curve garnicht beeinflusst, und gleichzeitig $\lambda x = x'$, $y' = \lambda y$, was eine Dehnung der Curve bedeutet, so hat man

$$x' = a_0 \lambda \alpha^3 z^3 + a_1 \lambda \alpha^2 z^2$$
$$y' = b_0 \lambda \alpha^3 z^3 + b_1 \lambda \alpha^2 z^2 + b_2 \lambda \alpha z,$$

und man kann noch 2 Coefficienten numerisch bestimmt, z. B. $= 1$ machen. Bestimmt man so λ und α aus den Gleichungen $a_1 \lambda \alpha^2 = 1$, $b_2 \lambda \alpha = 1$, so hat man jetzt die Curvengleichungen vereinfacht in die Form

$$\begin{cases} x = a_0 z^3 + z^2 & = f \\ y = b_0 z^3 + b_1 z^2 + z & = f_1. \end{cases}$$

Die Bedingung, dass diese Curve einen rationalen Bogen habe, ist nun $\varphi'^2 = f'^2 + f_1'^2$, oder

$$(3a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2)^2 = p(a) + p(b),$$

wo $p(a)$ und $p(b)$ Ausdrücke bezeichnen, die von den Coefficienten a oder b ebenso abhängen, wie der Ausdruck auf der linken Seite von den Coefficienten α. Aus der Bedingung zieht man folgende Einzelgleichungen:

1) $a_2^2 = 1$,
2) $a_1 a_2 = b_1$,
3) $3a_0 a_2 + 2a_1^2 = 2 + 3b_0 + 2b_1^2$,
4) $a_0 a_1 = a_0 + b_0 b_1$,
5) $a_0^2 = a_0^2 + b_0^2$.

Daraus ergiebt sich:

$$a_2 = \pm 1, \quad a_1 = \pm b_1, \quad a_0 = \pm \left(\frac{2}{3} + b_0\right),$$
$$a_0 = \frac{2}{3} b_1, \quad b_0 = \frac{1}{3}(b_1^2 - 1).$$

Die gesuchte Curve ist also

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} b_1 z^3 + z^2 \\ y = \frac{1}{3}(b_1^2 - 1) z^3 + b_1 z^2 + z. \end{cases}$$

Sie hat den Bogen

$$s = C \pm \left\{ \frac{1}{3}(b_1^2 + 1) z^3 + b_1 z^2 + z \right\}.$$

Will man in die Gleichungen wieder die möglich grösste Zahl willkürlicher Constanten einführen, so muss man der Curve

wieder eine willkürliche Dehnung erteilen durch die Substitution $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, und das Coordinatensystem durch die willkürliche Verschiebung $x' = x + \mu$, $y' = y + \nu$ wieder verallgemeinern.

Man kann die Curve noch in einfacheren Gleichungen als den obigen darstellen. Man nehme in den ursprünglichen Gleichungen zuerst eine Drehung des Coordinatensystems vor

$$\xi = Ax - By$$
$$\eta = Bx + Ay.$$

wo A der Cosinus, $B = \sqrt{1 - A^2}$ der Sinus des Drehungswinkels ist. Dann wird

$$\xi = (Aa_0 - Bb_0)\, z^3 + \cdots$$
$$\eta = (Ba_0 + Ab_0)\, z^3 + \cdots$$

Man wähle nun die Drehung so, dass

$Aa_0 - Bb_0 = 0$, also $B^2 = \dfrac{a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$ ist, was immer einen reellen Wert des Drehungswinkels giebt [wenn a_0 und b_0 reell sind]. Man kann nunmehr in den ursprünglichen Curvengleichungen $a_0 = 0$ annehmen. Da man ausserdem noch dieselben Reduktionen wie vorher anstellen kann, so darf in den Bestimmungsgleichungen von früher $b_0 = 0$ gesetzt werden. Dann ergiebt sich die Curve

$$\begin{cases} x = z^2 \\ y = -\dfrac{1}{3} z^3 + z \end{cases} \qquad s = C \pm \left(\frac{z^3}{3} + z \right)$$

oder

$$y^2 = x\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 \quad [s = C + \sqrt{x}\,(1 + x)]$$

Durch Drehung und Verschiebung des Coordinatensystems und durch Dehnung der Curve werden in die Gleichungen 4 willkürliche Constante eingeführt, so dass die Curve eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit besitzt.

Um übrigens der gefundenen Curve ihre allgemeinste Gestalt zu geben, braucht man nur eine willkürliche Dehnung derselben vorzunehmen $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$. Dann werden die Gleichungen

$$\begin{cases} x' = \lambda z^2 \\ y' = \lambda \left(z - \dfrac{1}{3} z^3 \right) \end{cases}$$

Der Bogen geht dabei in λs über, denn man hat $(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = \lambda^2 [dx^2 + dy^2] = \lambda^2 ds^2$.

Also $s' = C \pm \lambda \left(z + \frac{z^3}{3} \right)$. Oder man hat nach Elimination von z

$$\lambda y^2 = x \left(1 - \frac{\lambda x}{3} \right)^2$$

$$s = C + \lambda \sqrt{\frac{x}{\lambda}} \left(1 + \frac{x}{3\lambda} \right).$$

Wir untersuchen die Curve

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}{z - z_1} \\ y = \dfrac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z - z_1} \end{array} \right.$$

mit rationalem Bogen:

$$s = C + \frac{\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3}{z - z_1}.$$

Die Coefficienten a_2 und b_2 kann man gleich Null annehmen, weil dieses nur eine Verschiebung des Coordinatensystems bedeutet ($x' = x - a_2$, $y' = y - b_2$), ebenso kann $\alpha_2 = 0$ gesetzt werden, weil

$$s = C + \frac{\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 (z - z_1) + (\alpha_3 + \alpha_2 z_1)}{z - z_1}$$

$$= C + \alpha_2 + \frac{\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + (\alpha_3 + \alpha_2 z_1)}{z - z_1}.$$

Aus der Bedingungsgleichung:

$$(f''g - fg'')^2 + f_1'^2 g - f_1 g')^2 = (\varphi' g - \varphi g')^2,$$

oder: $(2\alpha_0 z^3 + [\alpha_1 - 3\alpha_0 z_1] z^2 - 2\alpha_1 z_1 z - \alpha_3)^2 = p(a) + p(b)$

findet man:

$$\begin{array}{ll} 1) & a_0^2 + b_0^2 = \alpha_0^2, \\ 2) & a_0 a_1 + b_0 b_1 = \alpha_0 \alpha_1, \\ 3) & a_1^2 + b_1^2 = \alpha_1^2, \\ 4) & a_0 a_3 + b_0 b_3 = \alpha_0 \alpha_3, \\ 5) & a_1 a_3 + b_1 b_3 = \alpha_1 \alpha_3, \\ 6) & a_1 a_3 + b_1 b_3 = \alpha_1 \alpha_3, \\ 7) & a_3^2 + b_3^2 = \alpha_3^2. \end{array}$$

Die Gleichungen sind schon so vereinfacht, dass die Resultate aus voranstehenden Gleichungen verwertet sind. So findet man eigentlich

$$2) \quad a_0 a_1 - 3a_0^2 z_1 + b_0 b_1 - 3b_0^2 z_1 = \alpha_0 \alpha_1 - 3\alpha_0^2 z_1,$$

was sich aber vermöge der in 1) stehenden Beziehung vereinfacht.

Hat man nun 3 Gleichungen

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2,$$
$$x_0 x_1 + y_0 y_1 = z_0 z_1,$$
$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2,$$

so folgt daraus immer $\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0}$. Denn man hat

$$(x_0^2 + y_0^2)(x_1^2 + y_1^2) = (x_0 x_1 + y_0 y_1)^2,$$

woraus folgt $x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0.$

In unserem Gleichungssystem folgt daher aus 1), 2), 3) $\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}$, aus 1), 4), 7): $\frac{a_3}{a_0} = \frac{b_3}{b_0}$. Unsere Curve wird

$$\left| x = \frac{a_0\left(z^3 + \frac{a_1}{a_0} z^2 + \frac{a_3}{a_0}\right)}{z - z_1}, \right.$$
$$\left| y = \frac{b_0\left(z^3 + \frac{b_1}{b_0} z^2 + \frac{b_3}{b_0}\right)}{z - z_1}, \right.$$

d. i. eine grade Linie $\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0}$.

Die beiden unter einander übereinstimmenden Gleichungen 5) und 6) sind übrigens Folge der anderen. Denn wenn man allgemein hat

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2,$$
$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2,$$

und ausserdem $\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0}$, so lässt sich leicht zeigen, dass auch die Gleichung gilt $x_0 x_1 + y_0 y_1 = z_0 z_1$. Daher sind 5) und 6) Folge von 3) und 7), und von der aus 1) bis 4) bereits nachgewiesenen Beziehung $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$.

Die Betrachtung der übrigen Gleichungsformen ergiebt keine neue Curve 3ter Ordnung mehr. Denn da allgemein, wenn g vom Grade m ist und den Faktor $(z - z_\mu)^{\gamma_\mu}$ enthält, durch die Substitution $\frac{1}{z - z_\mu}$ statt $z - z_\mu$ g auf den Grad $m - \gamma_\mu$

erniedrigt wird, so reduciert sich die Curve mit dem Nenner $g = (z - z_1)^2$ auf die mit dem Nenner $z - z_1$, also auf eine grade Linie. Für die Curve

$$x = \frac{a_0 z^3 + a_2 z + a_3}{z^2 + c_1 z + c_2},$$
$$y = \frac{b_0 z^3 + b_2 z + b_3}{z^2 + c_1 z + c_2}.$$

(der Nenner sei ohne Doppelfaktor), in der wir ähnlich wie oben a_1, b_1, $\alpha_1 = 0$ annehmen dürfen, wird die Bedingung

$$[\alpha_0 z^4 + 2\alpha_0 c_1 z^3 + (3\alpha_0 c_2 - \alpha_2) z^2 - 2\alpha_1 z + (\alpha_2 c_2 - \alpha_3 c_1)^2]$$
$$= p(a) + p(b), \quad \text{woraus folgt:}$$

1) $a_0^2 + b_0^2 = \alpha_2$,
2) $0 = 0$,
3) $a_0 a_2 + b_0 b_2 = \alpha_0 \alpha_2$,
4) $a_0 a_3 + b_0 b_3 = \alpha_0 \alpha_3$,
5) $a_2^2 + b_2^2 = \alpha_2^2$,
6) $a_2 a_3 + b_2 b_3 = \alpha_2 \alpha_3$,
7) $0 = 0$,
8) $a_3^2 + b_3^2 = \alpha_3^2$,
9) $0 \quad 0$.

Daraus ergiebt sich wieder $\frac{a_2}{a_0} = \frac{b_2}{b_0}$, nämlich aus 1), 3), 5), und $\frac{a_3}{a_0} = \frac{b_3}{b_0}$, nämlich aus 1), 4), 8). Die Curve ist also eine grade Linie.

Es giebt somit nur eine einzige Curve 3ter Ordnung mit rationalem Bogen. Denn die Fälle, für welche y vom 3ten Grade ist, brauchen wir nach dem im Abschnitt II Gesagten nicht mehr zu untersuchen.

Wir untersuchen die Curve 4ter Ordnung:

$$\begin{cases} x = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \\ y = b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4, \end{cases}$$

mit rationalem Bogen $s = \alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + C$.

Die Coefficienten a_4, b_4 können wir durch die Coordinatenverschiebung $x' = x - a_4$, $y' = y - b_4$ entfernen, vorher den Coefficienten a_3 durch eine Substitution $z + \beta$ statt z; dann können wir a_1 und b_2 gleich 1 machen durch die Substitution

αz statt z und die gleichzeitige Dehnung der Curve $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$. Die Bedingung ist

$$(4\alpha_0 z^3 + 3\alpha_1 z^2 + 2\alpha_2 z + \alpha_3)^2 = p(a) + p(b).$$

Daraus erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

1) $\alpha_0^2 = a_0^2 + b_0^2$,
2) $\alpha_0 \alpha_1 = a_0 + b_0 b_1$,
3) $16\alpha_0\alpha_2 + 9\alpha_1^2 = 16a_0a_2 + 9 + 16b_0 + 9b_1^2$,
4) $2\alpha_0\alpha_3 + 3\alpha_1\alpha_2 = 3a_2 + 2b_0b_3 + 3b_1$,
5) $2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_3 = 2a_2^2 + 2 + 3b_1b_3$,
6) $\alpha_2\alpha_3 = b_3$, 7) $\alpha_3^2 = b_3^2$.

Löst man die Gleichungen rückwärts gehend auf, indem man b_3, a_2 als Willkürliche annimmt, so erhält man

7′) $\alpha_3 = \pm b_3$,
6′) $\alpha_2 = \pm 1$,
5′) $\alpha_1 = \pm \left(\frac{2a_2^2}{3b_3} + b_1 \right)$, also rational ausgedrückt durch die Willkürlichen und linear durch b_1.
4′) $\alpha_0 = \pm \left(b_0 + \frac{a_2}{b_3} \left[\frac{3}{2} - \frac{a_2}{b_3} \right] \right)$, also linear durch b_0.
3′) $\alpha_0 = \frac{a_2^3}{4b_3^2} + \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{3}{4} b_1 - \frac{1}{b_3^2} \right) + \frac{3}{2b_3} - \frac{9}{16a_2}$, also linear durch b_1.
2′) $\alpha_0\alpha_1$ enthält gemäss 5′) und 4′) das Glied b_0b_1; da sich dieses gegen die rechte Seite der Gleichung weghebt, erhält man: b_0 linear ausgedrückt durch b_1.
1′) ergiebt eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von b_1 durch die Willkürlichen a_2, b_3; also

$$b_1 = R(a_2, b_3) \pm \sqrt{R_1(a_2, b_3)}.$$

Alle Coefficienten sind dann rational ausgedrückt durch a_2, b_3 und durch die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von a_2, b_3. Die Maximalzahl der Constanten, (5), erhält man wieder durch Coordinatenverschiebung und Dehnung der Curve.

Ein Beispiel (bei welchem die Coefficienten aber in anderer Weise reduciert sind, als oben angegeben) ist

$$\begin{cases} x = a_0 z^4 - \frac{9}{32} \frac{b_1^2}{a_0} z^2, \\ y = b_1 z^3, \end{cases}$$
$$s = t \pm \left(a_0 z^4 + \frac{9}{32} \frac{b_1^2}{a_0} z^2 \right).$$

Eine Dehnung der Curve führt keine neue willkürliche Constante ein, weil dann wird

$$x = (\lambda a_0) z^4 - \frac{9}{32} \frac{(\lambda b_1)^2}{(a_0 \lambda)} z^2, \; y = (\lambda b_1) z^3.$$

Dagegen führen Drehung und Verschiebung des Coordinatensystems 3 neue Constanten ein. Die Curve besitzt daher 5fach unendliche Mannigfaltigkeit.

Wir untersuchen die Curve

$$\begin{cases} x = \dfrac{z^4 + a_1 z^3 + z^2 + a_4}{z} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_4}{z} \end{cases}$$

mit rationalem Bogen $\quad s = \dfrac{\alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_4}{z} + C.$

Aus $g = z - z_1$ ist z_1 durch die Substitution $z + z_1$ statt z entfernt. a_0 und a_2 ist gleich 1 gemacht durch die Substitution αz statt z und durch Dehnung der Curve.

Die Bedingung $(3\alpha_0 z^4 + 2\alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 - \alpha_4)^2 = p(a) + p(b)$ ergiebt:

1) $\alpha_0^2 = 1 + b_0^2$,
2) $\alpha_0 \alpha_1 = a_1 + b_0 b_1$,
3) $3\alpha_0 \alpha_2 + 2\alpha_1^2 = 3 + 2a_1^2 + 3b_0 b_2 + 2b_1^2$,
4) $\alpha_1 \alpha_2 = a_1 + b_1 b_4$,
5) $6\alpha_0 \alpha_4 - \alpha_2^2 = 6a_4 - 1 + 6b_0 b_4 - b_2^2$,
6) $\alpha_1 \alpha_4 = a_1 a_4 + b_1 b_4$,
7) $\alpha_2 \alpha_4 = a_4 + b_2 b_4$,
8) Die Coefficienten der ersten Potenz ergeben die identische Gleichung $0 = 0$.
9) $\alpha_4^2 = a_4^2 + b_4^2$.

Als einfaches Beispiel finden wir die Curve:

$$\begin{cases} x = \dfrac{z^4 + z^2 + \frac{1}{12}(b_2^2 - 1)}{z} \\ y = \dfrac{b_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2}{z} \end{cases}$$

$$s = \int \frac{z^4 + z^2 - \frac{1}{12}(b_2^2 + 1)}{z} \cdot$$

Um die allgemeine Curve zu bestimmen, wählen wir a_1 und b_0 als Willkürliche, so ergiebt sich:

1′) $\alpha_0 = \sqrt{1 + b_0^2}$.

2′) $\alpha_1 = \dfrac{a_1 + b_0 b_1}{\sqrt{1 + b_0^2}}$, also rational ausgedrückt durch b_1.

3′) α_2 rational ausgedrückt durch α_1, b_1, b_2; durch b_2 linear im Zähler.

4′) b_2 rational durch α_1, α_2, b_1, also rational durch b_1 und b_2, letzteres steht nur linear im Zähler: daher b_2 rational durch b_1.

5′) α_4 rational durch α_2, b_2, also durch b_1 und linear im Zähler durch a_4, b_4.

6′) und 7′) sind linear in a_4 und b_4, daher a_4 und b_4 rational durch b_1 auszudrücken.

9′) Bedingungsgleichung für b_1, aus welcher dasselbe durch die Willkürlichen a_1 und b_0 auszudrücken ist.

Durch Dehnung und Coordinatenverschiebung erteilt man den Gleichungen wieder einen Zuwachs von 3 Constanten, so dass alle Coefficienten durch 5 Willkürliche auszudrücken sind.

Die als Beispiel vorher angeführte Curve besitzt ebenfalls eine 5fach unendliche Mannigfaltigkeit.

Für die Curve

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_3 z + a_4}{z^2} \\ y &= \frac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_3 z + b_4}{z^2} \end{aligned}\right.$$

ist die Bedingung:

$$(2\alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 - \alpha_3 z - 2\alpha_4)^2 = p(a) + p(b).$$

Daraus ergiebt sich:

1) $\alpha_0^2 = a_0^2 + b_0^2$,
2) $\alpha_0 \alpha_1 = a_0 a_1 + b_0 b_1$,
3) $\alpha_1^2 = a_1^2 + b_1^2$,
4) $\alpha_0 \alpha_3 = a_0 a_3 + b_0 b_3$,
5) $\alpha_0 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 = a_0 a_4 + a_1 a_3 + b_0 b_4 + b_1 b_3$,
6) $\alpha_1 \alpha_4 = a_1 a_4 + b_1 b_4$,
7) $\alpha_3^2 = a_3^2 + b_3^2$,
8) $\alpha_3 \alpha_4 = a_3 a_4 + b_3 b_4$.
9) $\alpha_4^2 = a_4^2 + b_4^2$.

Aus 1), 2), 3) folgt $\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1}$, aus 1), 4), 7) $\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3}$. Daher ist auch $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$, folglich mit Berücksichtigung von 3) und 7) $\alpha_1 \alpha_3 = a_1 a_3 + b_1 b_3$. Dann wird aus 5) $\alpha_0 \alpha_4 = a_0 a_4 + b_0 b_4$, und hieraus, wie aus 1) und 9) folgt $\frac{a_0}{a_4} = \frac{b_0}{b_4}$. Je 2 entsprechende Coefficienten in x und y unterscheiden sich nun blos durch ein und denselben Faktor, also ist die Curve eine grade Linie $x = Cy$.

In denjenigen Curvengleichungen, welche als Nenner $y = z^2 + c_1 z + c_2$, ohne Doppelfaktor, haben, kann man durch die unter Umständen imaginäre Substitution $\alpha z + \beta$ statt z bewirken, dass $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ wird, also

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_3 z + a_4}{z^2 + 1}, \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_3 z + b_4}{z^2 + 1}. \end{array} \right.$$

Die Bedingung ist:

$$(2\alpha_0 z^5 + \alpha_1 z^4 + 4\alpha_0 z^3 + (3\alpha_1 - \alpha_3) z^2 - 2\alpha_1 z + \alpha_3)^2 = p(a) + p(b).$$

Hieraus erhalten wir folgende Gleichungen [die Nummer giebt die zugehörige Potenz von z an]:

0) $\alpha_3^2 = a_3^2 + b_3^2$,
1) $\alpha_3 \alpha_4 = a_3 a_4 + b_3 b_4$,
2) $3\alpha_1 \alpha_3 + 2\alpha_4^2 = p(a) + p(b)$,
3) $2\alpha_0 \alpha_3 - 3\alpha_1 \alpha_4 = p(a) + p(b)$,
10) $\alpha_0^2 = a_0^2 + b_0^2$,
9) $\alpha_0 \alpha_1 = a_0 a_1 + b_0 b_1$,
8) $\alpha_1^2 = a_1^2 + b_1^2$,
7) $\alpha_0 \alpha_3 = a_0 a_3 + b_0 b_3$,
6) $4\alpha_0 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 = p(a) + p(b)$,
5) $\alpha_1 \alpha_4 = a_1 a_4 + b_1 b_4$,
4) $\alpha_1 \alpha_3 + 4\alpha_0 \alpha_4 = p(a) + p(b)$.

Die Gleichung 3) ist überflüssig, weil sie sich durch Subtraktion von Vielfachen der Gleichungen 5) und 7) ergiebt. Wir sagen: 3) ist keine „selbstständige“ Gleichung. Aus 6) und 4) findet man:

6′) $\alpha_1 \alpha_3 = a_1 a_3 + b_1 b_3$,
4′) $\alpha_0 \alpha_4 = a_0 a_4 + b_0 b_4$.

Aus 2) findet man mit Berücksichtigung von 6′):

$$2') \quad \alpha_i^{\,2} = a_i^{\,2} + b_i^{\,2}.$$

Wir haben dann 10 selbstständige Gleichungen, jede von der Form $\alpha_i \alpha_k = a_i a_k + b_i b_k$. Darin sind alle möglichen Grössen $\alpha_i \alpha_k$, nämlich 10 enthalten. Aus diesen Gleichungen schliesst man ebenso wie in den früheren ähnlichen Fällen, dass die Curve eine grade Linie ist.

Man erkennt allgemeiner den Grund, warum die Curve eine Grade wird: die Gleichungen sind linear in den 10 Grössen $\alpha_i \alpha_k$; die Zahl der selbstständigen Gleichungen — d. h. derjenigen Gleichungen, deren keine sich durch Addition oder Subtraktion von Vielfachen der anderen Gleichungen ergiebt*) — ist ebenfalls 10) — denn 3) fällt weg —, die Grössen $\alpha_i \alpha_k$ lassen sich also ausdrücken, und zwar in der Form $\alpha_i \alpha_k = a_i a_k + b_i b_k$. Denn da jede Gleichung von der Form ist $f(\alpha) = f(a) + f(b)$, so erhält man durch Addition, resp. Subtraktion von Vielfachen immer wieder Gleichungen von derselben Symmetrie; die Berechnung der Grössen $\alpha_i \alpha_k$ geschieht aber durch solche Operationen. Drei Gleichungen

$$\alpha_i^{\,2} = a_i^{\,2} + b_i^{\,2},$$
$$\alpha_i \alpha_k = a_i a_k + b_i b_k,$$
$$\alpha_k^{\,2} = a_k^{\,2} + b_k^{\,2}$$

haben aber immer zur Folge die Beziehung $\frac{a_i}{a_k} = \frac{b_i}{b_k}$, und da diese Beziehung nunmehr für alle Coefficienten a, b gilt, so hat man auch $\frac{a_i}{a_0} = \frac{b_i}{b_0}$ für alle Werte von i. Hieraus folgt, dass die Curve eine grade Linie $x = Cy$ ist.

Ein Grund, dass eine Curve sich auf eine Grade reduciert, liegt also darin, dass alle Grössen $\alpha_i \alpha_k$ sich aus den in Bezug auf sie linearen Gleichungen ausdrücken lassen. Dass dieser Fall vorliegt, wird immer dann wahrscheinlich, wenn die einfache Abzählung ergiebt, dass die Zahl der Gleichungen grösser oder gleich der Zahl der $\alpha_i \alpha_k$ ist. In dem soeben betrachteten Falle war die Zahl der selbstständigen Gleichungen gleich der Zahl der $\alpha_i \alpha_k$, die ursprüngliche Abzählung ergab eine Gleichung mehr als $\alpha_i \alpha_k$. Die Curve

*) Diese selbstständigen Gleichungen sind darum noch nicht von einander unabhängig.

kann aber schon eine Grade sein, wenn die Zahl der Gleichungen kleiner ist als die der $\alpha_i \alpha_k$, wenn sich also nicht alle $\alpha_i \alpha_k$ durch Subtraktion und Addition von Vielfachen der Gleichungen ausdrücken lassen. Man denke sich den Fall, dass $2n-1$ selbstständige Gleichungen sich zusammenfassen lassen, die nur die $2n-1$ Grössen α_0^2; $\alpha_0\alpha_1$, α_1^2; $\alpha_0\alpha_2$, α_2^2; .. $\alpha_0\alpha_n$, α_n^2 enthalten — [α_0, α_1, ... α_n sind nur n Grössen, da ein Coefficient zur Constanten C gezogen ist; das entsprechende a und b ist durch Coordinatenverschiebung entfernt] —. Da sich dann diese Grössen ausdrücken lassen $\alpha_i \alpha_k = a_i a_k + b_i b_k$, so folgt $\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0} = \frac{b_n}{b_0}$, also wäre die Curve eine Grade.

Von den obigen Grössen $\alpha_i \alpha_k$ könnten auch einige durch andere vertreten sein, z. B. $\alpha_0\alpha_2$ durch $\alpha_1\alpha_2$, was denselben Erfolg haben würde, aber z. B. nicht $\alpha_0\alpha_3$ durch $\alpha_1\alpha_2$, weil sonst — wenn die übrigen $\alpha_i \alpha_k$ die oben stehenden bleiben — nicht gefunden werden könnte $\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3}$. Allgemein können wir sagen: Die Curve kann schon eine Grade sein, wenn gewisse $2n-1$ von den $\frac{n(n+1)}{2}$ Grössen $\alpha_i \alpha_k$ sich aus $2n-1$ in Bezug auf sie linearen Gleichungen ausdrücken lassen. So für die Curve

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{z^2}, \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{z^2}, \end{array} \right.$$

lassen sich 7 Gleichungen zusammenfassen [siehe oben: 1), 2), 3), 4), 7), 8), 9)], aus denen α_0^2, $\alpha_0\alpha_1$, α_1^2, $\alpha_0\alpha_3$, α_3^2, $\alpha_3\alpha_4$, α_4^2 bereits ausgedrückt ist. Daher ist die Curve eine Grade. Die Zahl der Gleichungen (9) ist aber kleiner als die der $\alpha_i \alpha_k$ (10).

Wir betrachten die Curve

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_0 z^4 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}{z^3 + c_1 z^2 + z}, \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4}{z^3 + c_1 z^2 + z}, \end{array} \right.$$

in welcher der Nenner g vom 3ten Grade ohne mehrfachen Faktor ist. c_3 ist gleich 0, $c_2 = 1$ gemacht.

Die Bedingung

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_0 z^6 + 2\alpha_0 c_1 z^5 + (3\alpha_0 - \alpha_2) z^4 - 2\alpha_3 z^3 \\ \quad - (\alpha_3 c_1 + 3\alpha_4) z^2 - 2\alpha_4 c_1 z - \alpha_4\end{array}\right\}^2 = p(a) + p(b),$$

ergiebt folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & \alpha_0{}^2 = a_0{}^2 + b_0{}^2, \\ 2) & \alpha_0{}^2 = a_0{}^2 + b_0{}^2, \end{array}\right.$$

3) $\alpha_0\alpha_2 = a_0 a_2 + b_0 b_2$,

4) $\alpha_0\alpha_3 = a_0 a_3 + b_0 b_3$,

5) $-6\alpha_0\alpha_4 + \alpha_2{}^2 = p(a) + p(b)$,

6) $-4\alpha_0\alpha_4 c_1 + \alpha_2\alpha_3 = p(a) + p(b)$,

7) $-\alpha_2{}^2 - 10\alpha_0\alpha_4 + 2\alpha_3{}^2 + 3\alpha_2\alpha_4 = p(a) + p(b)$,

8) $-\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_0\alpha_4 c_1 + c_1(\alpha_3{}^2 + \alpha_2\alpha_4) + 3\alpha_3\alpha_4 = p(a) + p(b)$,

$$\left\{\begin{array}{ll} 13) & \alpha_4{}^2 = a_4{}^2 + b_4{}^2, \\ 12) & \alpha_4{}^2 = a_4{}^2 + b_4{}^2, \end{array}\right.$$

11) $\alpha_3\alpha_4 c_1 + \alpha_2\alpha_4 = p(a) + p(b)$,

10) $\alpha_3\alpha_4(c_1{}^2 + 1) - \alpha_2\alpha_4 c_1 = p(a) + p(b)$,

9) $-6\alpha_0\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_4 + 14\alpha_3\alpha_4 c_1 + \alpha_3{}^2 c_1{}^2 = p(a) + p(b)$.

Die Curve ist eine grade Linie, weil alle $\alpha_i\alpha_k$ sich ausdrücken lassen. Nämlich aus 13), 11), 10) lassen sich $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_4{}^2$ ausdrücken. Da dann für diese Grössen $\alpha_i\alpha_k = p(a) + p(b)$ ist, so wird aus 9), 8), 7), 6):

9′) $-6\alpha_0\alpha_4 + \alpha_3{}^2 c_1{}^2 = p(a) + p(b)$,

8′) $-\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_0\alpha_4 c_1 + \alpha_3{}^2 c_1 = p(a) + p(b)$,

7′) $-\alpha_2{}^2 - 10\alpha_0\alpha_4 + 2\alpha_3{}^2 = p(a) + p(b)$,

6′) $\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_0\alpha_4 c_1 = p(a) + p(b)$.

Hieraus lässt sich $\alpha_0\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_2{}^2$, $\alpha_3{}^2$ ausdrücken. In 1), 3), 4) sind schon $\alpha_0{}^2$, $\alpha_0\alpha_2$, $\alpha_0\alpha_3$ ausgedrückt. 5) ist keine selbstständige Gleichung, da sie sich aus 9′), 8′), 7′), 6′) ergiebt. Ebenso sind 2) und 12) keine selbstständigen Gleichungen; wir haben also deren nur so viele (10), als gerade nötig sind, um die 10 Grössen $\alpha_i\alpha_k$ auszudrücken.

Die Curve, für welche $g = (z - z_1)^2(z - z_2)$ ist, ist eine grade Linie, weil durch die Substitution $\frac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$, $g = (z - \xi_1)(z - \xi_2)$ wird. Wenn $g = (z - z_1)^3$ ist, reduciert sich die Curve auf die schon betrachtete mit $g = z - \xi$. Von den Curven, für welche g vom 4ten Grade wird, brauchen wir, nach dem im IIten Abschnitt Gesagten, nur diejenigen zu betrachten, für welche g lauter imaginäre Faktoren hat. Auch diese Curven

sind keine echten Curven 4ter Ordnung. Wenn nämlich die Faktoren alle verschieden sind, so reducieren sich die Gleichungen durch eine imaginäre Substitution für z auf solche mit $y = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3)$; wenn 2 Doppelfaktoren vorhanden sind, auf solche mit $y = (z - \zeta)^2$. Man sieht daraus, dass diese Curven imaginäre grade Linien sind.

IV. Die Curven 3ter und 4ter Ordnung mit algebraischem Bogen.

Wir betrachten die Curve

$$\begin{cases} x = z^3 + a_1 z^2, \\ y = \quad z^2 + b_2 z. \end{cases}$$

b_0 ist durch Drehung des Coordinatensystems entfernt, a_2 durch die Substitution $z + \beta$ statt z, a_3 und b_3 durch Verschiebung des Coordinatensystems. a_0 und b_1 sind durch die Substitution αz statt z und durch Drehung der Curve zu 1 gemacht. Der Bogen ist $s = C + \sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}$.

Die Fälle, in welchen φ von niedrigerem als 6tem Grade, in welchem wir also die Faktoren von φ anders bilden müssten sind nach Abschnitt II ausgeschlossen. Die Bedingung

$$f'^2 + f'_1{}^2 = \frac{1}{4}\frac{\varphi'^2}{\varphi}, \quad \text{oder}$$
$$(3z^2 + 2a_1 z)^2 + (2z + b_2)^2 = \frac{9}{4}(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)(2\alpha_0 z + \alpha_1)^2$$

ergiebt:

1) $1 = \alpha_0{}^3$,
2) $2a_1 = 3\alpha_0{}^2\alpha_1$,
3) $4a_1{}^2 + 4 = \frac{45}{4}\alpha_0\alpha_1{}^2 + 9\alpha_0{}^2\alpha_2$
4) $4b_2 = \frac{9}{4}\alpha_1{}^2 + 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2$,
5) $b_2{}^2 = \frac{9}{4}\alpha_1{}^2\alpha_2$.

Die Auflösung der Gleichungen ergiebt die semikubische Parabel:

$$\begin{cases} x = z^3 \\ y = z^2 \end{cases}$$

$$s = C + \sqrt{\left(z^2 + \frac{4}{9}\right)^3}.$$

oder nach Dehnung:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} z^3 \\ y = \frac{1}{\lambda} z^2 \end{cases}$$

$$s = C + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(z^2 + \frac{4}{9}\right)^3}.$$

Eliminiert man z, so erhält man

$$x^2 = \lambda y^3,$$

$$s = C + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\lambda y + \frac{4}{9}\right)^3}.$$

Die Curve besitzt eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit. Wir untersuchen die Curve:

$$\begin{cases} x = \frac{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_3}{z - z_1}, \\ y = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_3}{z - z_1}, \end{cases}$$

mit dem algebraischen Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{z - z_1}.$$

Da wir nur den Fall zu betrachten haben, dass φ wirklich vom 6^{ten} Grade ist, nehmen wir $\alpha_0 \gtrless 0$ an. α_1 kann dann gleich 0 angenommen werden, weil in φ der Coefficient von z' verschwindet, wenn man $z - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0}$ statt z setzt. Ferner kann, wegen der Substitution βz statt z, $z_1 = -1$ angenommen werden.

Die Bedingung $(2a_0 z^3 + [a_1 + 3a_0]z^2 + 2a_1 z - a_3)^2 + p(b)$
$= (\alpha_0 z^2 + \alpha_2)(2\alpha_0 z^2 + 3\alpha_0 z - \alpha_2)^2$ ergiebt

1) $a_0^2 + b_0^2 = \alpha_0^3$,
2) $a_0 a_1 + b_0 b_1 = 0$,
3) $a_1^2 + b_1^2 = 0$,
4) $-a_0 a_3 + b_0 b_3 = \frac{3}{2}\alpha_0^2 \alpha_2$,

$$\begin{cases} 6) \quad 2a_1 a_3 + 2b_1 b_3 = 3\alpha_0 \alpha_2^2, \\ 5) \quad 2a_1 a_3 + 2b_1 b_3 = 3\alpha_0 \alpha_2^2, \end{cases}$$

7) $a_3^2 + b_3^2 = \alpha_2^3$.

Aus 3) müssen wir $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ schliessen, damit kein Coefficient imaginär wird. Aus 6) folgt dann $\alpha_3 = 0$ [da $\alpha_0 \gtrless 0$], also aus 7) $a_3 = 0$, $b_3 = 0$. Dann ist die Curve aber eine grade Linie $\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0}$.

Es fragt sich noch, ob es eine Curve von den vorgelegten Gleichungen mit dem Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(z - z_1)(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z + \beta)^2}}{z - z_1}$$

giebt. Durch die reelle Substitution $\frac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ gehen aber die Gleichungen über in

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}{(z - z_1)^2}, \\ y = \dfrac{b_0 z^3 + \cdot\cdot + b_3}{(z - z_1)^2}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z + \beta)^2}}{(z - z_1)^2},$$

worin φ nur vom 5^{ten} Grade ist, welchen Fall wir von der Betrachtung ausgeschlossen haben.

Von den übrigen Gleichungsformen der Curven 3^{ter} Ordnung ist nur noch zu untersuchen

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^3 + a_2 z + a_3}{z^2 + c_1 z + c_2}, \\ y = \dfrac{b_0 z^3 + b_2 z + b_3}{z^2 + c_1 z + c_2}. \end{cases}$$

Der Bogen sei $s = C + \dfrac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{z^2 + c_1 z + c_2}$,

so können wir, wie im vorigen Falle $\alpha_0 \gtrless 0$, $\alpha_1 = 0$ annehmen.

Die Bedingung

$$[a_0 z^4 + 2a_0 c_1 z^3 + (3a_0 c_2 - a_2) z^2 - 2a_3 z + a_2 c_2 - a_3 c_1]^2 + p(b)$$
$$= (\alpha_0 z^2 + \alpha_2)[3\alpha_0 z(z^2 + c_1 z + c_2) - (\alpha_0 z^2 + \alpha_2)(2z - c_1)]^2$$

ergiebt:

$$\begin{cases} 1) & \alpha_0{}^3 = a_0{}^2 + b_0{}^2, \\ 2) & \alpha_0{}^3 = a_0{}^2 + b_0{}^2, \\ 3) & 3\alpha_0{}^2 \alpha_2 = 2a_0 a_2 + 2b_0 b_2, \\ 4) & 0 = a_0 a_3 + b_0 b_3, \\ 5) & a_2{}^2 + b_2{}^2 = 0. \end{cases}$$

Aus 5) schliesst man, damit alle Coefficienten reell sind, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$; folglich aus 3) $\alpha_2 = 0$, dann ist aber der Bogen in Wirklichkeit rational $[\sqrt{\varphi} = z^3 \sqrt{\alpha_0}]$, und die Curve muss nach dem Früheren eine grade Linie sein.

Der Bogen unserer betrachteten Curven könnte noch sein

$$s = C + \frac{\sqrt{(z - z_1)(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z + \beta)^2}}{z^2 + c_1 z + c_2},$$

wenn z_1 eine reelle Wurzel von $g = 0$ ist [wenn sie imaginär wäre, würde das Polynom φ imaginär sein, was ausgeschlossen ist], oder er könnte sein

$$s = C + \frac{\sqrt{(z^2 + c_1 z + c_2)(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{z^2 + c_1 z + c_2}.$$

Im ersteren Falle wird durch die Substitution $\frac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ φ vom 5^{ten} Grade (während g vom 2^{ten} Grade bleibt).

Im zweiten Fall, in welchem wieder $\alpha_0 \gtrless 0$, $\alpha_1 = 0$ angenommen werden kann, ergiebt die Bedingung

$$[a_0 z^4 + 2a_0 c_1 z^3 + (3a_0 c_2 - a_2) z^2 - 2a_3 z + a_2 c_2 - a_3 c_1]^2 + p(b)$$
$$= (z^2 + c_1 z + c_2)\left[2\alpha_0 z (z^2 + c_1 z + c_2) - (\alpha_0 z^2 + \alpha_2)\left(z + \frac{c_1}{2}\right)\right]^2$$

1) $a_0^2 + b_0^2 = \alpha_0^2$,

2) $a_0^2 + b_0^2 = -\frac{1}{2}\alpha_0^2$.

Hieraus folgt aber schon im Widerspruch mit unserer Annahme $\alpha_0 = 0$.

Für die nunmehr zu untersuchende Curve 4^{ten} Grades schicken wir das Beispiel voran:

$$\begin{cases} x = z^4 + \frac{3}{2} z^2, \\ y = z, \end{cases}$$
$$s = C + z\sqrt{(z^2 + 1)^3},$$

oder nach Dehnung:

$$x = \lambda z^4 + \frac{3}{2} \lambda z^2,$$
$$y = \lambda z,$$
$$s = C + \lambda z \sqrt{(z^2 + 1)^3}.$$

Die Elimination von z ergiebt:

$$x = \frac{y^4}{\lambda^3} + \frac{3}{2}\frac{y^2}{\lambda},$$

$$s = C + y\sqrt{\left(\frac{y^2}{\lambda^2}+1\right)^3}.$$

Die Curve besitzt eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit. Die allgemeine Curve können wir schreiben:

$$x = a_0 z^4 + a_1 z^3 + \frac{3}{2} z^2,$$

$$y = b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + z,$$

$$s = C + \sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}.$$

Die Bedingung ist:

$$(4a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 2a_2 z + a_3)^2 + p(b)$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)\left[3(z+\beta)(2\alpha_0 z + \alpha_1) + 2(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)\right]^2$$

oder

$$= \frac{1}{4}(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_1)\begin{bmatrix} 64\alpha_0{}^2 z^4 + 16\alpha_0(5\alpha_1 + 6\alpha_0\beta)z^3 \\ + [16\alpha_1(3\alpha_1\beta + 2\alpha_2) + (5\alpha_1 + 6\alpha_0\beta)^2]z^2 \\ + 2(3\alpha_1\beta + 2\alpha_2)(5\alpha_1 + 6\alpha_0\beta)z \\ + (3\alpha_1\beta + 2\alpha_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhält man 7 Gleichungen mit 9 Unbekannten, also bleiben 2 Coefficienten willkürlich. Die Abzählung ist erlaubt, weil z. B. für $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = 0$ sich zeigt, dass sich die Gleichungen auflösen lassen, ohne dass eine Folge der anderen ist. Durch Verallgemeinerung des Coordinatensystems und willkürliche Dehnung erhält die Curve noch einen Zuwachs von 3 Constanten.

Für die nächste Curve ist ein Beispiel:

$$\begin{cases} x = \dfrac{z^4 + z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}}{z}, \\ y = -\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,z^2 + \frac{1}{6\sqrt{3}}}{z}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{3}\right)^3 (z+1)^2}}{z}.$$

Die Curve besitzt eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit. Die Gleichungen der allgemeinen Curve können wir schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{z^4 + z^3 + a_2 z^2 + a_4}{z}, \\ y &= \frac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_4}{z}, \end{aligned}\right.$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}}{z}.$$

Die Bedingung ist

$$\begin{aligned} &(3a_0 z^4 + 2a_1 z^3 + a_2 z^2 - a_4)^2 + p(b) \\ &= (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2) \left| \begin{array}{c} 9\alpha_0{}^2 z^6 + 6\alpha_0 \left(\frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_0\beta\right) z^5 \\ + \left[3\alpha_0\alpha_1\beta + \left(\frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_0\beta\right)^2\right] z^4 \\ + \left[\alpha_1\beta\left(\frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_0\beta\right) - 6\alpha_0\alpha_2\right] z^3 \\ + \left[\frac{1}{4}\alpha_1{}^2\beta^2 - 2\alpha_2\beta\left(\frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_0\beta\right)\right] z^2 \\ - \alpha_1\alpha_2\beta^2 z + \alpha_2{}^2\beta^2 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 8 Gleichungen mit 10 Unbekannten (der Coefficient von z^7 ist auf beiden Seiten identisch Null), also bleiben 2 Constante willkürlich. Diese Abzählung ist erlaubt, weil alle 8 Gleichungen von einander unabhängig sind. Setzt man nämlich $\beta = 0$, $b_1 = 1$, so ergiebt sich:

1) $a_4{}^2 + b_4{}^2 = 0$, oder $a_4 = ib_4$,
2) $a_2 = ib_2$,
3) $2a_4 + 2b_4 = 3\alpha_0\alpha_2{}^2$,
4) $-2a_4 - 2b_0 b_4 = -2\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_1{}^2\alpha_2$,
5) $4a_2 + 4b_2 = -6\alpha_0{}^2\alpha_2 + \frac{9}{4}\alpha_1{}^3 + 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2$,
6) $8 + 6a_2 + 6b_0 b_2 = \frac{45}{4}\alpha_0\alpha_1{}^2 + 9\alpha_0{}^2\alpha_2$,
7) $2 + 2b_0 = 3\alpha_0{}^2\alpha_1$,
8) $1 + b_0{}^2 = \alpha_0{}^3$.

Die a und b lassen sich alle aus linearen Gleichungen bestimmen. Durch α_0, α_1, α_2, vorausgesetzt, dass keines der α Null ist, nämlich a_4, b_4 aus 1) und 3), a_2, b_2 aus 2) und 5), b_0

aus 4). 6), 7), 8) sind dann nicht homogene Bestimmungsgleichungen für α_0, α_1, α_2, aus welchen sich dieselben als von Null verschieden bestimmen. Die Curve erhält durch Dehnung und Coordinatenverschiebung noch einen Zuwachs von 3 Constanten, so dass alle Constanten durch 5 Willkürliche ausgedrückt sind.

Eine Curve von den eben betrachteten Gleichungsformen könnte noch den Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{z(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^2 (z+\beta)^3}}{z}$$

besitzen. Durch die reelle Substitution $\frac{1}{z}$ statt z wird aber φ vom 7^{ten} Grade, was als imaginärer Fall ausgeschlossen ist.

Wir betrachten die Curve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_3 z + a_4}{z^2 + c_1 z + c_2} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_3 z + b_4}{z^2 + c_1 z + c_2} \end{cases}$$

mit dem Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}}{z^2 + c_1 z + c_2}.$$

Die Bedingung ist:

$$\begin{bmatrix} (2a_0 z^5 + [3a_0 c_1 + a_1] z^4 + [4a_0 c_2 + 2a_1 c_1] z^3 \\ + [3a_1 c_2 - a_3] z^2 - 2a_1 z + a_3 c_2 - a_4 c_1) \end{bmatrix}^2 + p(b),$$

$$= (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2) \begin{vmatrix} (3\alpha_0 z + \frac{3}{2}\alpha_1)(z+\beta)(z^2 + c_1 z + c_2) \\ + (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)(z^2 + c_1 z + c_2) \\ - (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)(z+\beta)(2z + c_1) \end{vmatrix}^2.$$

Durch Drehung des Coordinatensystems kann b_0 zu Null gemacht werden, alsdann durch die Substitution $z + \gamma$ statt z noch ein anderer Coefficient; endlich können noch durch Dehnung der Curve und gleichzeitige Substitution αz statt z 2 Coefficienten numerisch bestimmt (von Null verschieden) gemacht werden. Die wieder aufgetretenen Coefficienten a_2 und b_2 entfernt man durch Coordinatenverschiebung. Dann sind aber nur noch 10 Coefficienten in den 11 Bestimmungsgleichungen vorhanden, also muss mindestens eine Gleichung Folge der

übrigen sein.*) Demnach bleiben in 10 Bestimmungsgleichungen mit 14 Constanten (nur 2 sind durch die Substitution $\alpha z + \gamma$ statt z zu entfernen, ohne dass die Curve oder das Coordinatensystem beeinflusst wird) 4 Willkürliche. Die Bestimmungsgleichungen ergeben durch Nullsetzen passender Coefficienten das Beispiel

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_0^{\frac{3}{2}} z^4 + \frac{3}{16}\frac{\alpha_2^{\,2}}{\alpha_0^{\,1/2}}}{z^2 + \frac{\alpha_2}{8\alpha_0}} \\ y &= \frac{\alpha_0^{\,\frac{3}{2}} z}{z^2 + \frac{\alpha_2}{8\alpha_0}} \end{aligned}\right.$$

$$s = C + \frac{z\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_2)^3}}{z^2 + \frac{\alpha_2}{8\alpha_0}}.$$

Durch die Dehnung $x' = \frac{x}{\alpha_2 \alpha_0^{\,1/2}}$, $y' = \frac{y}{\alpha_2 \alpha_0^{\,1/2}}$

wird

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{az^4 + \frac{3}{16a}}{z^2 + \frac{1}{8a}} \\ y' &= \frac{\sqrt{\frac{1}{a}}\, z}{z^2 + \frac{1}{8a}} \end{aligned}\right. \qquad \left(a = \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right),$$

und wenn man $\frac{1}{\sqrt{a}} z$ statt z setzt:

*) Man vergleiche, dass auch in den früheren Fällen, in denen sich wirkliche Curven n^{ter} Ordnung ergaben, wenn g von höherem als 0^{tem} Grade war, eine der Bestimmungsgleichungen eine identische war.

$$\begin{cases} x = \dfrac{z^4 + \frac{3}{16}}{z^2 + \frac{1}{8}} \\ y = \dfrac{z}{z^2 + \frac{1}{8}} \end{cases}.$$

Durch Coordinatenverschiebung und Dehnung können also nicht mehr als 3 Constante in die Gleichungen eintreten, auch wenn wir von den Gleichungen mit den 2 Willkürlichen α_0, α_2 ausgehen. Dagegen kann noch durch Drehung des Coordinatensystems eine 4te Constante eingeführt werden. Die Curve besitzt also eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit.

Ein Curve von den zuletzt betrachteten Gleichungsformen könnte noch den Bogen besitzen

$$s = C + \frac{\sqrt{(z - z_1)(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (\beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2)^3}}{z^2 + c_1 z + c_2},$$

wenn z_1 eine reelle Wurzel der Gleichung $g = 0$ ist; oder

$$s = C + \frac{\sqrt{(z^2 + c_1 z + c_2)(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{z^2 + c_1 z + c_2}.$$

Im ersteren Falle wird durch die reelle Substitution $\dfrac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ φ vom 7ten Grade, also sind die Coefficienten imaginär. Im zweiten Falle sei $z^2 + c_1 z + c_2 = (z - z_1)(z - z_2)$, so gehen durch die eventuell imaginäre Substitution statt $\dfrac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ die Gleichungen über in

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{(z - z_1)^2 (z - z_2)} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{(z - z_1)^2 (z - z_2)} \end{cases},$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(z - z_2)(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z - z_1)^2 (z - z_2)}.$$

Die Bedingung

$$\left[\begin{array}{l}(4a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 2a_2 z + a_3)(z^2 - [z_1 + z_2] z + z_1 z_2) \\ - (a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4)[3z - (z_1 + 2z_2)]\end{array}\right]^2 + p(b)$$

$$= (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)(z - z_2) \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2}(2\alpha_0 z + \alpha_1)(z^2 - [z_1 + z_2]z \\ + z_1 z_2) + \frac{1}{2}(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z \\ + \alpha_2)(z - z_1) - (\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z \\ + \alpha_2)[3z - (z_1 + 2z_2)] \end{array} \right\}^2$$

ergiebt:

1) $a_0^2 + b_0^2 = 0,$

2) $-2a_0^2(3z_1 + 2z_2) - 2b_0^2(3z_1 + 2z_2) = \frac{1}{4}\alpha_0^3.$

Daraus folgt $\alpha_0 = 0$. Da man nun noch, wegen der Substitution $z + z_2$ statt z; z_2 gleich Null annehmen kann; ferner durch Coordinatenverschiebung a_1 und b_1 entfernen kann, so wird die Bedingung einfacher:

$$\left[a_0 z^5 - 3a_0 z_1 z^4 - a_2 z^3 - (a_2 z_1 + 2a_3)z^2 - 3a_4 z + a_1 z_1\right]^2 + p(b)$$

$$= (\alpha_1 z^2 + \alpha_2 z) \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2}\alpha_1(z^2 - z_1 z) + \frac{1}{2}(\alpha_1 z + \alpha_2)(z - z_1) \\ - (\alpha_1 z + \alpha_2)(3z - z_1) \end{array} \right\}^2.$$

Daraus folgt:

1) $a_0^2 + b_0^2 = 0,$ folglich $a_0 = ib_0,$

3) $a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0,$ $a_2 = ib_2,$

4) $a_0 a_3 + b_0 b_3 = 0,$ $a_3 = ib_3.$

Ferner wird die letzte Gleichung:

11) $z_1^2(a_4^2 + b_4^2) = 0.$

Daraus folgt entweder $z_1 = 0$, was aber auszuschliessen ist, weil unser Nenner $(z - z_1)^2\left(z + \frac{1 - z_1^2 + z_1 z_2}{z_1 - z_2}\right)$ ist, wenn hierin z_1 und z_2 die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ bedeuten; dieser Nenner kann aber nicht auf die Form z^3 gebracht werden.

Oder man schliesst aus 11) $a_4^2 + b_4^2 = 0.$

Hieraus folgt entweder $a_4 = ib_4$, dann ist die Curve eine imaginäre grade Linie, oder man schliesst $a_4 = -ib_4$, dann folgt aus der vorhergehenden Gleichung

10) $a_4^2 + b_4^2 = -\frac{1}{24}\alpha_2^3 z_1^3,$

$\alpha_2 = 0$. Die beiden vorhergehenden Gleichungen werden

$$9)\quad (a_2a_4 + b_2b_4)z_1 + 2(a_3a_4 + b_3b_4) = 0,$$
$$8)\quad (a_2a_3 + b_2b_3)z_1 + 3(a_3a_4 + b_3b_4) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$a_2a_4 + b_2b_4 = 0,$$
$$a_3a_4 + b_3b_4 = 0,$$

also $a_2 = -ib_2$, $a_3 = -ib_3$; folglich, weil wir nach Früherem auch $a_2 = +ib_2$, $a_3 = +ib_3$ haben,

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Die vorhergehenden Gleichungen sind dann:

$$7)\quad a_0a_4 + b_0b_4 = -\frac{\alpha_1{}^3}{6},$$

$$6)\quad a_0a_3 + b_0b_3 = \quad \frac{\alpha_1{}^3}{10}.$$

Daraus folgt $\alpha_1 = 0$, der Bogen ist also $s = C$. Die noch übrige Bestimmungsgleichung

$$5)\quad a_0a_1 + b_0b_1 = 0$$

ergiebt $a_0 = -ib_0$, also wegen $a_0 = +ib_0$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0.$$

Die Curve wird eine imaginäre Grade

$$x = iy.$$

Eine Curve der betrachteten Gleichungsformen könnte endlich noch den Bogen besitzen:

$$s = C + \frac{\sqrt{(z^2 + c_1z + c_2)(\alpha_0z^3 + \alpha_1z^2 + \alpha_2z + \alpha_3)^2}}{z^2 + c_1z + c_2}.$$

Durch die Substitution $\frac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ gehen die Gleichungen über in:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_0z^4 + \cdots + a_4}{(z-z_1)^2(z-z_2)} \\ y &= \frac{b_0z^4 + \cdots + b_4}{(z-z_1)^2(z-z_2)} \end{aligned}\right. .$$

Wir können wieder z_2, a_1, $b_1 = 0$ annehmen, dann wird die Bedingung:

$$\left[a_0z^5 - 3a_0z_1z^4 - a_2z^3 - [a_2z_1 + 2a_3]z^2 - 3a_4z + a_4z_1\right]^2 + p(b)$$
$$= z\left\{\begin{aligned} &(2\alpha_1z + \alpha_2)(z^2 - z_1z) + \frac{1}{2}(\alpha_1z^2 + \alpha_2z + \alpha_3)(z - z_1) \\ &\qquad - (\alpha_1z^2 + \alpha_2z + \alpha_3)(3z - z_1) \end{aligned}\right\}^2.$$

Da man, ebenso wie in dem eben vorher betrachteten Falle, schliesst $\alpha_1 = 0$, so ist in der Bedingung schon $\alpha_3 = 0$ gesetzt. Man hat nun

$$1) \quad a_0^2 + b_0^2 = 0, \qquad a_0 = ib_0,$$
$$3) \quad a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0, \quad a_2 = ib_2.$$

Die letzte Gleichung ist:

$$11) \quad a_4^2 + b_4^2 = 0,$$

die vorletzte

$$10) \quad -6(a_4^2 + b_4^2) = \frac{1}{4}\alpha_1^3 z_1.$$

Daraus folgt entweder $z_1 = 0$, was wir wie im vorigen Falle ausschliessen können, oder es folgt $\alpha_3 = 0$. Dann heisst die vorhergehende Gleichung

$$9) \quad z_1(a_2 a_4 + b_2 b_4) + 2(a_3 a_4 + b_3 b_4) = 0.$$

Schliesst man nun aus 11) $a_4 = ib_4$, so folgt aus 9) auch $a_3 = ib_3$, also ist die Curve eine imaginäre Grade. Schliesst man aber aus 11) $a_4 = -ib_4$, so folgt aus 9):

$$9') \quad 2(b_3 - ia_3) + z_1(b_2 - ia_2) = 0,$$

oder auch

$$9'') \quad 2b_4(b_3 - ia_3) + b_2 z_1(b_4 + ia_4) = 0.$$

Ferner wird

$$8) \quad -4z_1(a_2 a_4 + b_2 b_4) + 12(a_3 a_4 + b_3 b_4) = \frac{1}{4}\alpha_2^2 z_1^2,$$

oder

$$8') \quad 3(b_3 - ia_3) - z_1(b_2 - ia_2) = \frac{1}{16 b_4}\alpha_2^2 z_1^2.$$

Aus 9') und 8') folgt:

$$b_3 - ia_3 = \frac{1}{80 b_4}\alpha_2^2 z^2_1,$$

$$b_2 - ia_2 = \frac{1}{40 b_4}\alpha_2^2 z_1.$$

Nimmt man zu der letzten Gleichung 3) $ib_2 - a_2 = 0$, so folgt:

$$a_2 = -\frac{i}{80 b_4}\alpha_2^2 z_1.$$

9'') ergiebt nach Einsetzung des zuletzt gefundenen Wertes von $b_3 - ia_3$:

$$b_4 + ia_4 = -\frac{1}{40 b_2}\alpha_2^2 z_1.$$

Nimmt man hierzu

$$11) \quad ib_4 + a_4 = 0,$$

so folgt

$$a_4 = \frac{i}{80b_2}\,\alpha_2{}^2 z_1.$$

Hieraus und aus

$$a_2 = -\frac{i}{80b_4}\,\alpha_2{}^2 z_1$$

folgt

$$\frac{a_4}{a_2} = -\frac{b_4}{b_2},$$

also

$$a_2 a_4 = -b_2 b_4.$$

Aus 3) $a_2 = ib_2$ und 11) $a_4 = -ia_4$ müsste aber folgen

$$a_2 a_4 = +b_2 b_4,$$

also ist die Folgerung $a_4 = -ib_4$ aus 11) nur gestattet, wenn $a_4 = 0$, $b_4 = 0$, oder $a_2 = 0$, $b_2 = 0$. Im ersteren Falle folgt aus 8) $\alpha_2 = 0$ und dann aus den noch bisher nicht berücksichtigten Bestimmungsgleichungen $\alpha_1 = 0$, also ist $s = C$, folglich die Curve eine (imaginäre) Grade. Nimmt man aber $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, und a_4, b_4 von Null verschieden, so folgt aus 9) $a_3 = -ib_3$, folglich aus 8) wieder $\alpha_2 = 0$ [weil nun $a_3 a_4 + b_3 b_4 = 0$ ist]. Wie vorher ergiebt sich dann auch noch $\alpha_1 = 0$.

Wir betrachten die Curve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_3 z + a_4}{(z - z_1)^2}, \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{(z - z_1)^2}, \end{cases}$$

mit dem Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z + \beta)^2}}{(z - z_1)^2}.$$

Durch die Substitution $\dfrac{1}{z + \beta}$ statt $z + \beta$ gehen die Gleichungen über in

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots a_4}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}, \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}, \end{cases}$$

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2}.$$

Ferner kann durch eine ganze rationale Substitution $\gamma z + \delta$ für z noch der Nenner auf die Form $(z^2 - 1)^2$ gebracht werden. In diesen Gleichungen müssten aber imaginäre Coefficienten auftreten [wir kommen bei den Curven mit dem Nenner $(z^2+1)^2$ darauf zurück], also gilt dasselbe auch von den ursprünglichen Gleichungen mit dem Nenner $(z - z_1)^2$.

Curven der eben betrachteten Gleichungsformen mit dem Bogen:

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z^2 + \beta_1 z + \beta_2)^2 (z - z_1)}}{(z - z_1)^2},$$

oder

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z - z_1)^2}}{(z - z_1)^2},$$

können wir ausschliessen, weil durch die Substitution $\frac{1}{z - z_1}$ statt $z - z_1$ φ von geringerem als 8$^{\text{tem}}$ Grade wird, während der Nenner vom 2$^{\text{ten}}$ Grade bleibt.

Wir haben ferner die Curve zu betrachten:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a_0 z^4 + \cdot\cdot + a_4}{z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3}, \\ y &= \frac{b_0 z^4 + \cdot\cdot + b_4}{z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3}, \end{aligned} \right.$$

mit dem Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z + \beta)^2}}{z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3}.$$

Der Nenner hat nur einfache Faktoren. Durch irgend eine rationale Substitution für z können wir die Gleichungen in die Form überführen;

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}{z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4}, \\ y &= \frac{b_1 z^3 + \cdot\cdot + b_4}{z^4 + \cdot\cdot + c_4}, \end{aligned} \right.$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z + \beta)^2}}{z^4 + \cdot\cdot + c_4},$$

in welcher der Nenner wieder nur einfache Faktoren besitzt.

Die Bedingung wird:

$$\begin{vmatrix} (3a_1z^2+2a_2z+a_3)(z^4+c_1z^3+\cdots+c_4) & (a_1z^3+\cdots+a_4) \\ (4z^3+3c_1z^2+2c_2z+c_3) & \end{vmatrix}^2 + p(b)$$

$$= (\alpha_0z^2+\alpha_1z+\alpha_2)\left\{\begin{array}{l}(3\alpha_0z+\frac{3}{2}\alpha_1)(z+\beta)(z^4+c_1z^3+\cdots+c_4)\\ +(\alpha_0z^2+\cdots+\alpha_2)(z^4+c_1z^3+\cdots+c_4)\\ -(\alpha_0z^2+\cdots+\alpha_2)(z+\beta)(4z^3+3c_1z^2\\ +\cdots+c_3)\end{array}\right\}^2.$$

Daraus ergeben sich 13 Bestimmungsgleichungen

$$1)\quad a_1^2+b_1^2=\alpha_0(\alpha_0\beta+\frac{3}{2}\alpha_1)^2$$

u. s. w.

Die Gleichungen sind sämmtlich von der Form $F(a,b)=f(\alpha)$, wo F eine lineare homogene Funktion der Grössen $a_\lambda a_\mu+b_\lambda b_\mu$, f eine homogene Funktion 3^{ten} Grades der Grössen α_0, α_1, α_2 bedeutet. Wir können nun aus 10 Gleichungen die 10 Grössen $a_\lambda a_\mu+b_\lambda b_\mu$ ausdrücken als homogene ganze Funktionen 3^{ten} Grades von α_1, α_1, α_2. Die 3 übrigen Gleichungen werden nach Einsetzen dieser Werte von $a_\lambda a_\mu+b_\lambda b_\mu$ homogene Gleichungen 3^{ten} Grades in α_0, α_1, α_2, welche nur $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ zulassen, der Bogen ist also $s=0$ und die Curve eine imaginäre Grade, da $a_\lambda=ib_\lambda$ ist.

Wenn wir annehmen, dass die in Rede stehende Curve einen Bogen

$$s=\frac{\sqrt{\varphi}}{z^3+c_1z^2+\cdot+c_3}$$

hat, worin φ einfache Faktoren mit $z^3+c_1z^2+c_2z+c_3$ gemeinsam hat, so gelten ähnliche Schlussfolgerungen wie vorher.

Wir haben noch diejenigen Curven zu betrachten, für welche der Nenner g vom 4^{ten} Grade mit lauter imaginären Faktoren wird. Bei der Curve:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a_0z^4+\cdots+a_4}{z^4+c_1z^3+\cdots+c_4},\\ y=\dfrac{b_0z^4+\cdots+b_4}{z^4+\cdots+c_4},\end{array}\right.$$

worin g lauter einfache imaginäre Faktoren hat, sind die Bögen denkbar

$$1)\quad s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}}{z^4 + \cdots + c_4} + C,$$

$$2)\quad s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z - z_1)(z - z_2)}}{z^4 + \cdots + c_4},$$

$$3)\quad s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3)^2 (z - z_1)(z - z_2)}}{z^4 + \cdots + c_4}.$$

Hierin darf $\alpha_0 = 0$ angenommen werden wegen der Substitution $\frac{1}{z-a}$ statt $(z-a)$, wo a eine reelle Wurzel der Gleichung $\alpha_0 z^3 + \cdots + \alpha_3 = 0$ bedeutet.

$$4)\quad s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^2 (z^4 + c_1 z^3 + \cdots + c_4)}}{z^4 + \cdots + c_4}.$$

Bei 2) und 3) bedeuten z_1 und z_2 2 konjugiert-komplexe Wurzeln der Gleichung $g = 0$. Alle diese Fälle ergeben keine willkürlichen Curven 4^{ter} Ordnung. Es gelten nämlich dieselben Schlussfolgerungen wie bei den Curven mit dem Nenner

$$z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3,$$

welche wir durch eine rationale Substitution für z ja auch auf die jetzt betrachtete Form überführten (nur enthielt dann

$$z^4 + c_1 z^3 + \cdots + c_4$$

nicht lauter imaginäre Faktoren). Aehnliche Schlussfolgerungen gelten ferner, wenn man Bögen annimmt, für welche φ von geringerem als 8^{ten} Grade ist. Wir erwähnen dieses, weil die Behauptung, dass φ genau vom n^{ten} Grade sein müsse, nur dann galt, wenn g von geringerem als n^{tem} Grade war.

Wir haben noch die Curve zu betrachten:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{(z - \xi - \eta i)^2 (z - \xi + \eta i)^2}, \\ y &= \frac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{(z - \xi - \eta i)^2 (z - \xi + \eta i)^2}, \end{aligned}\right.$$

für welche $g = 0$ nur imaginäre Wurzeln hat.

Es sei der Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}}{(z - \xi - \eta i)^2 (z - \xi + \eta i)^2}.$$

Durch die Substitution $\frac{1}{z+\beta}$ statt $z + \beta$ wird

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z - \xi - \eta i)^2 (z - \xi + \eta i)^2}.$$

Setzt man ferner z statt $z-\xi$, so wird $g=(z^2+\eta^2)^2$. Endlich durch die Substitution ηz statt z erreicht man, dass $g=(z^2+1)^2$ wird. Alle Coefficienten sind reell geblieben. a_0 und b_0 können durch Coordinatenverschiebung noch zu Null gemacht werden.

Die Bedingung wird dann:

$$[-a_1 z^4-2a_2 z^3+3(a_1-a_3)z^2+(2a_2-4a_4)z+a_3]^2+p(b)$$
$$=(\alpha_0 z^2+\alpha_1 z+\alpha_2)\left\{(3\alpha_0 z+\frac{3}{2}\alpha_1)(z^2+1)-4(\alpha_0 z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z)\right\}^2.$$

Als Beispiel findet man:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha_0^{\frac{3}{2}} z^3}{(z^2+1)^2}, \\ y=\dfrac{\frac{3}{2}\alpha_0^{\frac{3}{2}} z^2+\frac{1}{2}\alpha_0^{\frac{3}{2}}}{(z^2+1)^2}, \end{cases}$$

$$s=C+\frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2+\alpha_0)^3}}{(z^2+1)^2}=C+\frac{\alpha_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{z^2+1}}.$$

Die Curve besitzt eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit. Nämlich durch die Dehnung $x'=\dfrac{1}{\alpha_0^{\frac{3}{2}}}x$, $y'=\dfrac{1}{\alpha_0^{\frac{3}{2}}}y$, wobei $s'=\dfrac{1}{\alpha_0^{\frac{3}{2}}}s$ wird, geht sie über in

$$\begin{cases} x=\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}, \\ y=\dfrac{\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}}{(z^2+1)^2}, \end{cases} \quad s=C+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}.$$

Durch Drehung, Verschiebung des Coordinatensystems und Dehnung der Curve kann man dann 4 Constante einführen.

Bei der allgemeinen Curve kann man in den ursprünglichen Gleichungen durch die Substitution $z=\dfrac{Az'+B}{Cz'+D}$ 3 Coefficienten numerisch bestimmt machen. Die Bedingung ergiebt dann 9 Bestimmungsgleichungen mit 12 Unbekannten, was 3 Willkür-

liche geben würde. Da aber die als Beispiel angeführte Curve eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit besitzt, so muss eine der Bestimmungsgleichungen (wie in den früheren Fällen) identische Folge der andern sein.

Wir kommen hier auf die schon früher erwähnte Curve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1 z^3 + \cdots + a_4}{(z^2-1)^2}, \\ y = \dfrac{b_1 z^3 + \cdots + b_4}{(z^2-1)^2}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z^2-1)^2}$$

zurück. Setzt man in diesen Gleichungen iz statt z, so erhält man

$$\begin{cases} x = \dfrac{-ia_1 z^3 - a_2 z^2 + ia_3 z + a_4}{(z^2+1)^2}, \\ y = \dfrac{-ib_1 z^3 - b_2 z^2 + ib_3 z + b_4}{(z^2+1)^2}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(-\alpha_0 z^2 + i\alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z^2+1)^2}.$$

Soll also die Curve reelle Werte für a_1, a_2 $\cdots$ zulassen, so müssen die Bestimmungsgleichungen für die Curve mit $g = (z^2+1)^3$ rein imaginäre Werte für die Coefficienten ungrader Potenzen von z_1 gleichzeitig reelle Werte für die Coefficienten grader Potenzen von z zulassen; was aber nicht angeht (vergleiche das Beispiel).

Wir haben ferner die Curve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}{(z^2+k^2)^2}, \\ y = \dfrac{b_1 z^3 + \cdots + b_4}{(z^2+k^2)^2}, \end{cases}$$

zu betrachten mit dem Bogen

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z^2+k^2)}}{(z^2+k^2)^2}.$$

Wir setzen $\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ statt z_1, so wird

$$s = \int \frac{\sqrt{[\alpha_0(Az+B)^2 + \alpha_1(Az+B)(Cz+D) + \alpha_2(Cz+D)^2]^3}}{z[(A+kiC)+(B+kiD)]^2[z(A-kiC)+(B-kiD)]^2}.$$

Wenn wir die ursprüngliche Form wieder herstellen, ergiebt sich: s gleich

$$\sqrt{\left|\frac{\alpha_0 A^2+\alpha_1 AC+\alpha_2 C^2}{A^2+k^2C^2}z^2+\frac{2\alpha_0 AB+(AD+BC)\alpha_1+2CD\alpha_2}{A^2+k^2C^2}z+\frac{\alpha_0 B^2+\alpha_1 BD+\alpha_2 D^2}{A^2+k^2C^2}\right|^3}\Bigg|\left(z+\frac{BA+k^2DC}{A^2+k^2C^2}\right)^2+\frac{k^2(AD-BC)^2}{(A^2+k^2C^2)^2}\Bigg|$$
$$\left|\left(z+\frac{BA+k^2DC}{A^2+k^2C^2}\right)^2+\frac{k^2(AD-BC)^2}{(A^2+k^2C^2)^2}\right|^2.$$

Wir können nun die willkürlichen Constanten $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{D}{C}$ so bestimmen, dass

$$BA+k^2DC=0,$$
$$2\alpha_0 AB+(AD+BC)\alpha_1+2CD\alpha_2=0,$$
$$\frac{k(AD-BC)}{A^2+k^2C^2}=1$$

ist, d. h. wir können in den ursprünglichen Gleichungen $k=1$ $\alpha_1=0$ annehmen. Aus der ersten Gleichung folgt nämlich

$$\frac{D}{C}=-\frac{1}{k^2}\frac{B}{C}\frac{A}{C}.$$

Dieses ergiebt in die zweite Gleichung eingesetzt folgende Bestimmungsgleichung für $\frac{A}{C}$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2+\frac{2k^2}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{k^2}-\alpha_0\right)\frac{A}{C}-k^2=0.$$

Die 3te Gleichung

$$\frac{B}{C}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{A}{C}\right)^2+k\right]=-\left[k^2+\left(\frac{A}{C}\right)^2\right]$$

dient dann zur Bestimmung von $\frac{B}{C}$*). Die Bestimmung würde nur dann nicht möglich sein, wenn $\frac{1}{k}\left(\frac{A}{C}\right)^2+k=0$, also

*) Die Gleichung für $\frac{A}{C}$ muss immer einen reellen Wert dieser Grösse ergeben, weil das absolute Glied negativ ist, also bleiben nach der Substitution alle Coefficienten reell, wenn sie vorher reell angenommen werden durften.

$\frac{A}{C} = ik$ ist. Dann ergiebt aber die Bestimmungsgleichung für $\frac{A}{C}$

$$k\alpha_1 = i(\alpha_2 - \alpha_0 k^2),$$

also wären dann entweder einige der Grössen α_0, α_1, α_2 imaginär, was wir ausgeschlossen haben, oder es wäre schon $\alpha_1 = 0$, die ganze Substitution also unnötig [denn $k = 1$ können wir einfacher durch die Substitution yz statt z machen].

Die Bedingung ist nun:

$$\left[-a_1 z^4 - 2a_2 z^3 + 3(a_1 - a_3)z^2 + (2a_2 - 4a_4)z + a_3\right]^2 + p(b)$$
$$= [\alpha_0 z^4 + (\alpha_0 + \alpha_2)z^2 + \alpha_2]\left[3(\alpha_0 - \alpha_2)z\right]^2$$

Daraus folgt zunächst $a_3^2 + b_3^2 = 0$.

Falls also überhaupt reelle Coëfficienten zulässig sind, muss man $a_3 = 0$. $b_3 = 0$ daraus schliessen. Da ferner $a_1^2 + b_1^2 = 0$ aus der Bedingung folgt, so muss auch $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ sein. Die aus der Bedingung sich ergebenden Gleichungen beschränken sich dann auf

1) $4(a_2^2 + b_2^2) = 9\alpha_0(\alpha_0 - \alpha_2)^2$,

2) $-8(a_2^2 + b_2^2) + 16(a_2 a_4 + b_2 b_4) = 9(\alpha_0 - \alpha_2)^2(\alpha_0 + \alpha_2)$,

3) $4(a_2^2 + b_2^2) + 16(a_4^2 + b_4)^2 - 16(a_2 a_4 + b_2 b_4)$
$= 9\alpha_2(\alpha_0 - \alpha_2)^2$.

Durch Subtraktion von 2) und 3) findet man

$$-12(a_2^2 + b_2^2) + 32(a_2 a_4 + b_2 b_4) - 16(a_4^2 + b_4^2)$$
$$= 9\alpha_0(\alpha_0 - \alpha_2)^2.$$

Der Vergleich mit 1) zeigt:

$$-(a_2^2 + b_2^2) + 2(a_2 a_4 + b_2 b_4) - (a_4^2 + b_4^2) = 0,$$

das heisst

$$(a_2 - a_4)^2 + (b_2 - b_4)^2 = 0.$$

Wollten wir immer noch die Annahme festhalten, dass alle Coefficienten reell sind, so müssen wir schliessen $a_2 = a_4$, $b_2 = b_4$. Dann folgt aber aus 1) und 3) $\alpha_0 = \alpha_2$, folglich aus 2) $a_2 = ib_2$, $a_4 = ib_4$, also auch $a_2 = 0$, $b_2 = 0$. Es sind dann alle a, b Null. Wir ersehen ferner, wenn irgend eine der Grössen a, b von Null verschieden ist, müssen notwendig imaginäre Coefficienten auftreten. Setzt man in 1), 2), 3) $b_2 = 0$, $\alpha_0 = -\alpha_2$, so ergiebt sich als Beispiel eine imaginäre Curve 2^{ter} Ordnung:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3iz^2 + \dfrac{3}{2}i}{(z^2+1)^2}, \\ y = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{(z^2+1)^2}, \end{cases}$$

$$s = \frac{\sqrt{(-z^2+1)^3(z^2+1)}}{(z^2+1)^2} + C = \sqrt{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^3} + C.$$

Zu einer Curve von der zuletzt betrachteten Gleichungsform könnte ferner ein Bogen gehören:

$$s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3)^2 (z^2+1)}}{(z^2+1)^2}.$$

Hierin kann auch $\alpha_0 = 0$ genommen werden. Sei nämlich zuerst der Nenner $(z-h-ki)^2(z-h+ki)^2$, sei ferner $z=\gamma$ eine reelle Wurzel der Gleichung $\alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0$, so wird nach der Substitution $\dfrac{1}{z-\gamma}$ statt $z-\gamma$ die Funktion φ von der Form $(\alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3)^2[(z-h)^2 + k^2]$. Durch eine ganze rationale Substitution für z wird dann wieder der Nenner auf die Form $(z^2+1)^2$ gebracht, wobei die Form von φ unverändert bleibt. Alle Coefficienten sind hierbei reell geblieben.

Die Bedingung wird nun:

$$\left[-a_1 z^4 - 2a_2 z^3 + 3(a_1 - a_3)z^2 + (2a_2 - 4a_1)z + a_3\right]^2 + p(b)$$
$$= (z^2+1)\left[-\alpha_1 z^3 - 2\alpha_2 z^2 + (2\alpha_1 - 3\alpha_3)z + \alpha_2\right]^2.$$

Wir wählen, um ein Beispiel zu finden, $\alpha_2 = 0$, so ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen, in welchen wegen $a_3^2 + b_3^2 = 0$ schon $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ gesetzt ist:

1) $a_1^2 + b_1^2 = \alpha_1^2$,
2) $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$,
3) $4(a_2^2 + b_2) = 3\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_3$,
4) $a_1 a_4 + b_1 b_4 = 0$,
5) $-8(a_2^2 + b_2^2) + 16(a_2 a_4 + b_2 b_4) = -9\alpha_1^2 - 6\alpha_1\alpha_3 + 9\alpha_3^2$,
6) $a_1 a_4 + b_1 b_4 = 0$ [vgl. 4)],
7) $4(a_2^2 + b_2^2) - 16(a_2 a_4 + b_2 b_4) + 16(a_4^2 + b_4^2) = (2\alpha_1 - 3\alpha_3)^2$.

Um 2) und 4) zu befriedigen, nimmt man entweder $a_1 = 0$,

$b_1 = 0$, oder die Determinante $\begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_4, & b_4 \end{vmatrix} = 0$, wobei dann a_1 und b_1 auch von Null verschiedene Werte haben können. Im ersteren Falle enthalten x und y nur grade Potenzen von z, die Curve kann also nur von 2^{ter} Ordnung sein. Sie ist die imaginäre Curve:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\, z^2 + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}}{(z^2+1)^2}, \\ y = \dfrac{\dfrac{3i}{4\sqrt{2}}\, z^2}{(z^2+1)^2}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{z^2+1}}{(z^2+1)^2}.$$

Im zweiten Falle setze man $b_1 = 0$, was nur eine Drehung des Coordinatensystems bedeutet. Man schliesst dann aus 2) und 4) $a_2 = 0$, $a_4 = 0$ — was der Forderung $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$ entspricht —. Die übrigen Gleichungen sind:

$$3') \quad 4b_2^{\,2} = 3\alpha_1^{\,2} + 6\alpha_1\alpha_3,$$

$$7') \quad 2b_2 - 4b_4 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3,$$

$$5') \quad 4b_2 = \frac{9\alpha_1^{\,2} + 6\alpha_1\alpha_3 - 9\alpha_3^{\,2}}{2\alpha_1 - 3\alpha_3}.$$

Aus 3') und 5') erhält man eine Gleichung zwischen α_1 und α_3:

$$0 = 4\left[3\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2 + 6\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right]\left[2\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - 3\right]^2 - \left[9\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)^2 + 6\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - 9\right]^2.$$

Eine Wurzel derselben ist $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3} = 1$. Dann ergiebt sich

$$b_2 = -\frac{3}{2}\alpha_1, \; b_4 = -\frac{1}{2}\alpha_1.$$

Setzt man $\alpha_1 = 1$, so bedeutet dieses nur eine Dehnung der Curve. Die Gleichungen sind dann:

$$\begin{cases} x = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}, \\ y = \dfrac{-\dfrac{3}{2}z^2 - \dfrac{1}{2}}{(z^2+1)^2}, \end{cases}$$

$$s = C + \frac{\sqrt{(z^2+1)^2(z^2+1)}}{(z^2+1)^2} = C + \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Es ist dieses dieselbe Curve, auf die wir im früheren Falle $s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z^2+1)^2}$ gekommen sind. Von der allgemeinen Curve gilt: Wenn man in den allgemeinsten Gleichungen durch die Substitution $\frac{Az+B}{Cz+D}$ statt z 3 Coefficienten numerisch bestimmt gemacht hat, so ergiebt die Bedingung 9 Bestimmungsgleichungen mit 12 Unbekannten, also würden 3 willkürlich sein. Da aber das Beispiel eine 4fach unendliche Mannigfaltigkeit zeigt, so muss eine Gleichung Folge der anderen sein.

Diejenige Curve, für welche φ den Faktor $g = (z^2+1)^2$ enthält, während φ vom 8ten Grade ist, können wir ausschliessen, weil dann nämlich $\sqrt{\varphi}$ rational sein müsste.

Wir haben endlich noch die Fälle zu untersuchen, in welche φ von niedrigerem als 8tem Grade angenommen wird.

Sei der Bogen

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z^2 + \beta_1 z + \beta_2)^2}}{(z^2+1)^2} + C,$$

so können α_0 und α_1 nicht reell sein. Denn nach der Substitution $\frac{1}{\alpha_0 z + \alpha_1}$ statt $\alpha_0 z + \alpha_1$ wird

$$s = \frac{\sqrt{(\beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2)^2 (\alpha_0 z + \alpha_1)}}{(z^2 + c_1 z + c_2)^2}.$$

Nehmen wir nun α_0 und α_1 reell an, so sind alle Coefficienten reell geblieben und g hat wieder nur imaginäre Faktoren. Weil aber $\alpha_0 z + \alpha_1$ in φ ein einfacher Faktor ist, so muss er gleichzeitig Faktor von g sein, kann also doch nicht reell sein.

Ebenso erledigt sich der Fall, dass

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z+\beta)^2 (z^2+1)}}{(z^2+1)^2}$$

oder

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z^2+1)^2}}{(z^2+1)^2} \text{ ist.}$$

Wenn φ vom 6ten Grade ist, ergeben sich dieselben Formen für s wie beim 8ten Grade von φ. Der Fall

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha_0 z + \alpha_1)^3 (z+\beta)^2}}{(z^2+1)^2}$$

wird durch eine beliebige reelle Substitution $\frac{1}{\gamma z + \delta}$ für z auf eine beim 8^{ten} Grade von φ behandelte Form zurückgeführt. Dasselbe ist der Fall, wenn man φ vom 4^{ten}, 3^{ten} oder 2^{ten} Grade annimmt.

Wir stellen noch die gefundenen (reellen) Curven zusammen.

Eine Curve 3^{ter} Ordnung mit rationalem Bogen:

$$\begin{cases} x = \lambda z^2 \\ y = \lambda\left(-\frac{1}{3}z^3 + z\right), \end{cases} \quad \left[s = C \pm \lambda\left(\frac{z^3}{3} + z\right)\right]$$

oder:

$$\lambda y^2 = x\left(1 - \frac{\lambda x}{3}\right)^2, \quad \left[s = C + \lambda\sqrt{\frac{x}{\lambda}}\left(1 + \frac{x}{3\lambda}\right)\right].$$

Eine Curve 3^{ter} Ordnung mit algebraischem Bogen:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda}z^3 \\ y = \frac{1}{\lambda}z^2, \end{cases} \quad \left[s = C + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(z^2 + \frac{4}{9}\right)^3}\right]$$

oder:

$$x^2 = \lambda y^3, \quad \left[s = C + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\lambda y + \frac{4}{9}\right)^3}\right].$$

Curven 4^{ter} Ordnung mit rationalem Bogen:

1) $\begin{cases} x = a_0 z^4 + \cdots + a_3 z \\ y = b_0 z^4 + \cdots + b_3 z, \end{cases} \quad \left[s = \alpha_0 z^4 + \cdots + \alpha_5 z + C\right].$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = az^4 - \frac{9}{32}\frac{b^2}{a}z^2 \\ y = bz^3, \end{cases} \quad \left[s = C \pm \left(az^4 + \frac{9}{32}\frac{b^2}{a}\right)z^2\right].$$

2) $\begin{cases} x = \frac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{z} \\ y = \frac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{z}, \end{cases} \quad \left[s = \frac{\alpha_0 z^4 + \cdots + \alpha_i}{z} + C\right].$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = \lambda \dfrac{z^4 + z^2 + \dfrac{1}{12}(b^2 - 1)}{z} \\ y = \lambda \dfrac{bz^2 - \dfrac{1}{6}b}{z} \end{cases},$$

$$\left[s = C \pm \lambda \frac{z^4 + z^2 - \frac{1}{12}(b^2 + 1)}{z} \right]$$

Curven 4ter Ordnung mit algebraischem Bogen:

1)

$$\begin{cases} x = a_0 z^4 + \cdots + a_4 \\ y = b_0 z^4 + \cdots + b_4 \end{cases}, \left[s = C + \sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z + \beta)^2} \right].$$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = \lambda(z^4 + \frac{3}{2} z^2) \\ y = \lambda z \end{cases}, \quad \left[s = C + \lambda z \sqrt{(z^2 + 1)^3} \right]$$

oder:

$$x = \frac{y^4}{\lambda^3} + \frac{3}{2} \frac{y^2}{\lambda}$$

$$\left[s = C + y \sqrt{\left(\frac{y^2}{\lambda^2} + 1 \right)^3} \right]$$

2) $$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{z} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{z} \end{cases}, \left[s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z + \beta)^2}}{z} \right].$$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = \lambda \dfrac{z^4 + z^3 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6}}{z}, \\ y = \lambda \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, z^2 + \frac{1}{6\sqrt{3}}}{z}, \end{cases}$$

$$\left[s = C + \lambda \frac{\sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{3} \right)^3 (z + 1)^2}}{z} \right].$$

3)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{z^2 + c} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{z^2 + c} \end{cases}, \quad \left[s = C + \frac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3 (z+\beta)^2}}{z^2 + c} \right].$$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda\left(z^4 + \dfrac{3}{16}\right)}{z^2 + \dfrac{1}{8}} \\ y = \dfrac{\lambda z}{z^2 + \dfrac{1}{8}} \end{cases}, \quad \left[s = C + \lambda \frac{z\sqrt{(z^2+1)^3}}{z^2 + \frac{1}{8}} \right].$$

4)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 z^4 + \cdots + a_4}{(z^2+1)^2} \\ y = \dfrac{b_0 z^4 + \cdots + b_4}{(z^2+1)^2} \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{c} s = C + \dfrac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^3}}{(z^2+1)^2} \\ \text{oder } s = C + \dfrac{\sqrt{(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)^2 (z^2+1)}}{(z^2+1)^2} \end{array} \right].$$

Beispiel:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\lambda z^3}{(z^2+1)^2} \\ y = \lambda \dfrac{\dfrac{3}{2} z^2 + \dfrac{1}{2}}{(z^2+1)^2} \end{cases}, \quad \left[s = C + \frac{\lambda}{\sqrt{z^2+1}} \right].$$